This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

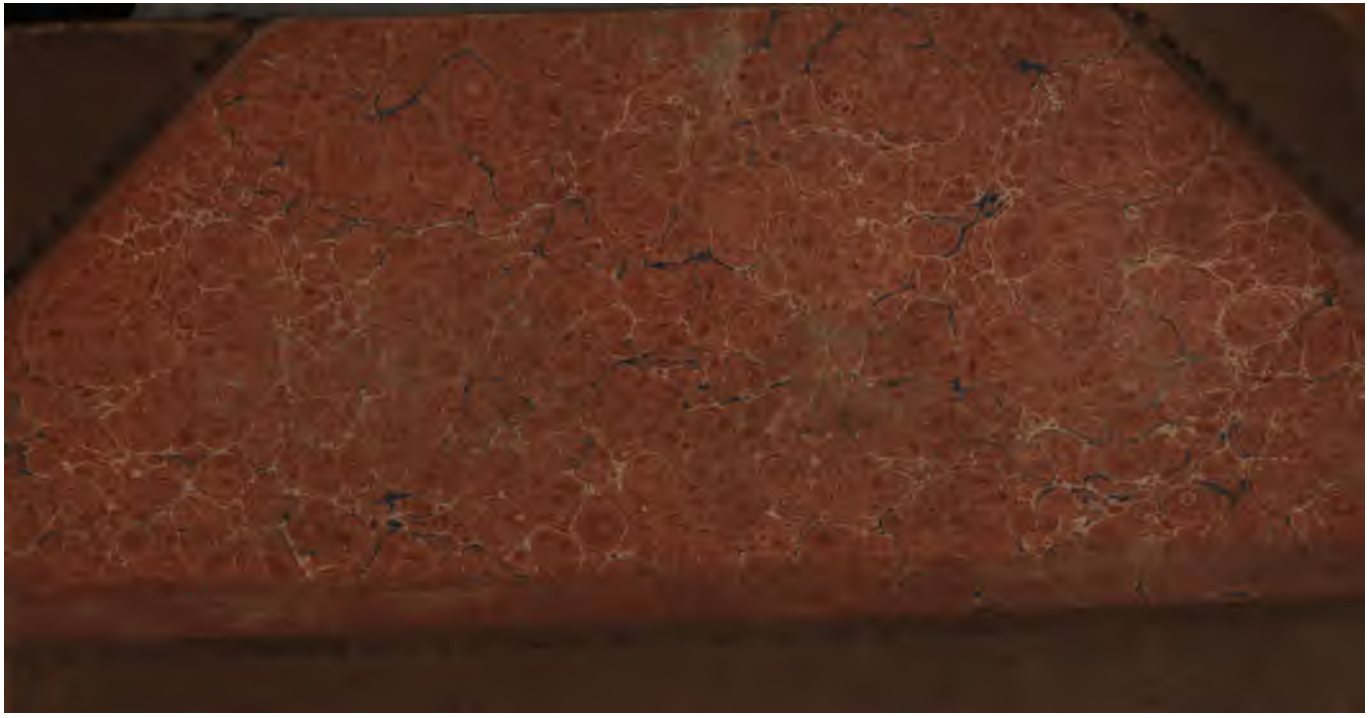
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



36.

3.

Des

APOLLONIUS VON PERGA

zwei Bücher

vom

Verhältnissschnitt

(de Sectione Rationis).

Aus dem Lateinischen des Halley, übersetzt und mit Anmerkungen begleitet und einem Anhange versehen

von

August Richter.

Mit vier Tafeln Figuren.

ELBING.

Druck und Verlag von *F. W. Neumann-Hartmann.*

1836.

J.

BIBLIOTHECA RODLEIANA

DEM ANDENKEN

DES HERRN

Dr. W. A. DIESTERWEG

ORDENTL. PROFESSORS DER MATHEM.
AN DER K. PR. RHEINUNIVERSITÄT

DES

VERDIENSTVOLLEN BEARBEITERS UND
WIEDERHERSTELLERS
APOLLONISCHER SCHRIFTEN.

Vorrede.

Das Werk des Apollonius vom Verhältnissschnitt (de sectione rationis) *wurde bis gegen den Anfang des vorigen Jahrhunderts für verloren gehalten. Da endlich entdeckte Edm. Bernard, Prof. der Astronomie und zugleich ein gründlicher Kenner der orientalischen Sprachen, unter den Manuscripten der Bodlejanischen Bibliothek in Oxford einen arabischen Codex, in dem er sogleich eine Übersetzung jenes Werkes erkannte. Erfreuet über diesen glücklichen Fund machte er sich mit grossem Eifer daran, das MS. ins Lateinische zu übertragen. Ehe er aber nur den zehnten Theil vollendet hatte, (siehe die Note zu S. 15) gab er sein Vorhaben auf, sey es dass ihn seine übrigen Studien abhielten oder dass ihn die Schwierigkeit des Unternehmens zurückschreckte; denn der Codex war nicht nur sehr schlecht geschrieben und entbehrte derjenigen Zeichen, durch die allein sich mehrere arabische Buchstaben von einander unter-*

scheiden, sondern liess auch oft einzelne Worte und bisweilen ganze Sätze aus und hatte in den Figuren häufig unrichtige Buchstaben. Halley endlich, sein zweiter Nachfolger, unternahm die Vollendung des Werkes. Man muss erstaunen über seine unermüdliche Geduld, wenn man bedenkt, dass er sich ohne alle Kenntniss der arabischen Sprache an diese Arbeit machte. Die erwähnte Übersetzung (welche noch nicht die 3 ersten Fälle des ersten Buches enthielt) musste ihm die Stelle einer Grammatik und eines Lexikons vertreten und eine wiederholte Vergleichung derselben mit dem arabischen Texte lehrte ihn endlich das ganze Werk verstehen und machte es ihm möglich dasselbe ins Lateinische zu übertragen. Die Übersetzung ist 1706 zu Oxford erschienen und mit einer kurzen Wiederherstellung der verloren gegangenen Apollonischen Schrift vom Raumschnitte (de sectione spatii) *versehen. Aus der Vorrede zu diesem Werke sind die obigen historischen Notizen entlehnt.*

Halley stellt in derselben die Vermuthung auf, dass die arabische Übersetzung bald nach dem Jahre 820 unter dem Kalifen Almaimon angefertigt worden sey, welcher ein eifriger Beförderer der Wissenschaften war und mehrere philosophische und mathematische Werke Griechen ins Arabische übertragen liess.

Der erwähnte Codex aber war zu Halley's Zeiten gegen 500 Jahre alt, denn auf der ersten Seite befindet sich, nach Halley's Bemerkung, der Name des Besitzers mit der Jahreszahl 633 nach der muhamedanischen Zeitrechnung, das ist 1235 nach der unsrigen.

Für die Echtheit des Werkes führt Halley folgende Gründe an: 1) beide Bücher des arabischen Manuscripts sind in so viele Fälle (Loca) *und Arten* (Casus) *eingetheilt als Pappus in der Vorrede zum siebenten Buche seiner mathematischen Sammlung angiebt. 2) die Anzahl und Ordnung der* casus dioristici *d. h. derjenigen* casus, *welche eine Determination erfordern, stimmt mit Pappus Angabe überein. 3) das zweite Buch ist auf das erste zurückgeführt und entlehnt seine Determinationen eben daher, gerade so wie Pappus das Apollonische Werk beschreibt. 4) dieselben Lemmata, welche in der arabischen Übersetzung hin und wieder vorkommen, beweist Pappus im Anfange seines siebenten Buches *). 5) die vier letzten Lemmata **) trägt Pappus in derselben Ordnung und mit denselben Worten vor wie Apollonius die Bestimmung der kleinsten und grössten Verhältnisse in Fall 6,* II. IV *und*

*) *Diese Lemmata finden sich in meinem „Raumschnitt"* (*Halberstadt* 1828).

**) *Lemma* 17—20.

Fall 7, II. IV *des ersten Buches. 6) die Figuren des arabischen Codex verrathen einen griechischen Ursprung, weil die Buchstaben nach der Ordnung des griechischen Alphabets auf einander folgen, welches vom arabischen verschieden ist.*

Diese Gründe sind allerdings triftig genug uns zu der Annahme zu berechtigen, dass der arabische Codex eine Übersetzung des Apollonischen Werkes sey. Betrachtet man aber Halley's Übersetzung genauer, so gelangt man bald zu der Überzeugung, dass dieses Werk in einer ziemlich unvollkommenen Gestalt vor uns liege. Die Mängel desselben betreffen aber theils die Eintheilung des Werkes theils die Ausarbeitung einzelner Theile.

Bedenkt man zuerst, dass der arabische Codex voller Lücken und an vielen Stellen undeutlich geschrieben war (adeo, *sagt Halley,* ut Divinatorem potius quam Interpretem ad sensum genuinum eruendum requisisse videretur), *dass Halley also nach eigener Ansicht die Lücken ausfüllte und die undeutlichen Stellen durch deutliche ersetzte: so geht schon hieraus hervor, dass wir den lateinischen Text nicht für eine getreue Übersetzung erklären können. Auffallende, von Halley nicht ausgefüllte, Lücken finden sich im ersten Buche in Fall 4,* II; *Fall 5,* II; *Fall 6,* III; *Fall 7,* I, III. *In der Synthesis zu Fall 4,* II *wird nicht bewiesen, dass die Linie*

HK *) *die Aufgabe löse; und doch fehlt dieser Beweis sonst nirgend im ersten Buche. In den übrigen genannten Stellen aber fehlt am Ende der Zusatz: »Die dem Punkte* M *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.« Ein solcher Zusatz findet sich in allen übrigen* Casus *des ersten Buches und darf desshalb nicht fehlen, weil sich das zweite Buch darauf bezieht (vergl. Buch 2 Fall 10,* III. IV*; Fall 14,* III. IV*). Ein merkwürdiges Glossem dagegen findet man unter andern am Ende des ersten Buches, nämlich die Worte* vel minor erit ea *bei der Bestimmung des Gränzverhältnisses in Fall 7,* IV.

Erwägt man ausserdem den wichtigen Umstand, dass Halley der arabischen Sprache ganz unkundig war und aus dem MS. selbst sie erst erlernte: so dürfte wohl der Zweifel erlaubt seyn, ob er den arabischen Text auch überall richtig verstanden habe. Wie leicht kann man unter solchen Umständen eine grammatische Form falsch deuten, mit einer ähnlichen verwechseln und so einem Gedanken eine verkehrte Wendung geben; und wie leicht kann

*) *Halley hat in seiner Übersetzung die Buchstaben der Figuren aus dem griechischen Alphabet genommen; es werden dafür in dieser Vorrede und in den Noten stets die Figuren der folgenden Übersetzung benutzt werden.*

einen solchen Fehler derjenige begehen, welcher sich ohne alle Sprachkenntniss an die Übersezzung einer mangelhaften und undeutlichen Handschrift wagt. Folgende Stelle scheint mir hierzu einen Belag zu enthalten. Im zweiten Theile der Synthesis von Fall 4, III *des zweiten Buches heisst es:* ac recta *GP* auferet rationem *FH* ad *EK* majorem quavis ratione quam secant rectae quaevis aliae per punctum *G* ductae, totique rectae *FM* occurrentes; vel quam rectae quae soli rectae *HM* occurrunt. Recta vero *GJ* abscindet rationem *FM* ad *ME* minorem quavis ratione quam auferunt rectae quaelibet soli *HM* occurrentes. *Die letzten (gesperrten) Worte fehlen im MS. und sind von Halley zugesetzt, da sie mit cursiver Schrift gedruckt sind. In der Mitte des Satzes aber findet sich der ganz unpassende Zusatz* vel quam rectae quae soli rectae *HM* occurrunt, *gerade die Worte, welche am Ende des Satzes fehlen. Sollte man hier nicht auf die Vermuthung kommen dürfen, dass diese Worte im MS. mit dem Folgenden verbunden sind und dass etwa so zu lesen seyn möchte:* omnium vero soli rectae *HM* occurrentium recta *GJ* abscindet rationem *FM* ad *ME* minimam. *Eben so ist in der Stelle Buch 2 Fall 5,* I. II *zu Ende vielleicht zu schreiben* ducantur — auferentes *statt* ductae — auferent.

Das Werk leidet aber ausserdem an Fehlern, die nicht sowohl dem Verfasser des lateinischen Textes als vielmehr dem arabischen Übersetzer zur Last zu fallen scheinen, und es ist merkwürdig, dass diese Fehler nur das zweite Buch betreffen. Das erste Buch haben wir, bis auf einige Lücken, die dem Abschreiber zugerechnet werden können, und bis auf einige Glosseme, von denen selten im Laufe von Jahrhunderten ein handschriftliches Werk befreit bleiben wird, in so vollkommener Gestalt erhalten, dass es höchstens in Kleinigkeiten vom Originale abweichen mag. Das zweite Buch hingegen trägt an vielen Stellen den Stempel der Flüchtigkeit, was schon die mangelhaften Figuren verrathen, und scheint grossentheils nicht sowohl eine treue Übersetzung als vielmehr eine nach oberflächlicher Durchsicht des Originals angefertigte freie Arbeit zu seyn. Diese Flüchtigkeit zeigt sich besonders in der ungleichmässigen Behandlung dieses Buches. Dahin rechne ich zunächst Folgendes.

Nachdem in denjenigen Fällen, welche auf das erste Buch zurückgeführt werden, die Analysis gezeigt hat, dass das Verhältniss NP:FK *gegeben sey, wird in allen (den 6ten ausgenommen) entweder in allen Arten* (Casus) *oder doch in den ersten hinzugefügt: »Es sind also zwei gerade Linien* NP, CD *der Lage nach ge-*

geben u. s. w.", wodurch derjenige Fall des ersten Buches bestimmt wird, auf welchen der vorliegende des zweiten zurückkommt. So geschieht diess, mit Ausnahme der Fälle 7. 8. 9, welche unabhängig vom ersten Buche gelöst werden, in Fall 1. 2 durchweg, in Fall 3, I; *4,* I. II; *5,* I. II; *10,* I; *11,* I; *12,* I; *13,* I. II. III; *14,* I. *Nur in Fall 6,* I. II. III *geschieht diess nicht, sondern erst in Fall 6,* IV. — *Ferner rechne ich dahin folgende zwei Sätze. Fall 7,* II *am Ende heisst es:* Recta igitur *GK* solvit problema; ao dico quod ea sola. Nam si ducatur recta alia ut *GR*; manifestum est illam satisfacere problemati, hanc vero non item. *und Fall 7,* III *am Ende:* Recta igitur *GK* solvit problema, eaque sola. Nam si ducatur recta alia, illa quidem satisfacit problemati, altera vero non item. *Diese Zusätze haben keinen Werth, wenn nicht bewiesen wird, dass die andere Linie das Verlangte nicht leiste; auch kommen sie sonst nirgend im zweiten Buche vor. Wollte man einwenden, sie seyen desswegen von Apollonius gemacht, weil der 7te Fall unabhängig vom ersten Buche gelöst wird: so ist nur nicht abzusehen, warum ein solcher Zusatz nicht auch in Fall 8. 9 und nicht schon in Fall 7,* I *gemacht wurde. — Ferner im ersten Buche wird in den Arten der Fälle 3 bis 7, in welchen kein* maximum *oder* minimum

statt findet, bewiesen, dass die dem Punkte M *in* AB *näheren geraden Linien grössere oder kleinere Verhältnisse bestimmen als die von ihm entfernteren. Da nun in den Fällen des zweiten Buches, welche auf das erste zurückgeführt werden, die Linie* NP *(oder* EP *in Fall 11) ler Linie* AB *des ersten Buches, und der Punkt* N *(oder* E *in* EP*) dem Punkte* M *im ersten Buche entspricht: so hätte der Symmetrie wegen im zweiten Buche die nähere oder entferntere Lage der zu ziehenden Linien auf den Punkt* N *in* NP *(oder* E *in* EP*) und nicht auf den Punkt* E *in* CD *bezogen werden müssen. Das letztere geschieht aber in Fall 11,* III. IV; *Fall 12,* 1; *Fall 13,* IV.

Zu der ungleichmässigen Behandlung des zweiten Buches rechne ich auch die auffallende Kürze in einzelnen Theilen mancher Fälle, wodurch zuweilen selbst Unrichtigkeiten entstehen. Dahin gehört der Schluss von Fall 9, IV, *wo nach der Determination bloss die Worte folgen:* Constat autem ex jam traditis, compositionem fieri posse duobus modis, utrinque a recta *GH*; scilicet rectis *EK*, *KL* occurrentibus, *was nur dann richtig ist, wenn das gegebene Verhältniss grösser als* EH:FK *ist. Ähnlich sind die Schlüsse von Fall 10,* V; *Fall 12,* III. IV; *Fall 14,* II. V. — *In der Synthesis zu Fall 4,* I *fehlt die Construction, welche hier nicht fehlen darf, weil der*

nachfolgende Beweis sie voraussetzt. — In Fall 12, I findet sich eine falsche Auflösung.

Am merkwürdigsten aber ist ein sonderbares Schwanken in der Angabe des abzuschneidenden Verhältnisses. Durch das ganze zweite Buch hindurch werden die in AB, CD *gegebenen Punkte* E, F *regelmässig mit* γ, ζ *bezeichnet. In einigen Fällen wird aber* γ *oder* E, *in andern dagegen* ζ *oder* F *als Anfangspunkt des abzuschneidenden Verhältnisses angenommen; und diese Unregelmässigkeit wird noch dadurch vergrössert, dass selbst in einem und demselben Falle bald der eine bald der andere Punkt genommen wird. Folgende Übersicht wird diess deutlich machen.*

Das abzuschneidende Verhältniss ist in

Fall 1. 2. 3	. . . . .	EH : FK
Fall 4, I	*Analysis*	EH : FK
	Synthesis	FK : EH
Fall 4, II	*Analysis* . . *zuerst*	EH : FK
	dann	FK : EH
	Determ. Synth. . .	EH : FK
Fall 4, III. IV	. . . . .	EH : FK
Fall 4, V	. . . . .	FK : EH
Fall 5. 6 / *Fall 7,* I	. . . . .	FK : EH
Fall 7, II. III / *Fall 8. 9*	. . . . .	EH : FK
Fall 10—14	. . . . .	FK : EH

Am unregelmässigsten ist offenbar der 4te Fall, welcher eben desswegen auch die auffallende Erscheinung darbietet, dass, wenn NH *gleich der mittlern Proportionale genommen wird, die Linie* GH *sowohl in* Cas. II. III *als auch in* Cas. V *beide Male ein grösstes Verhältniss abschneidet, obwohl ihnen entgegengesetzte Determinationen des ersten Buches zum Grunde liegen.*

Diese Verschiedenheit in der Angabe des abzuschneidenden Verhältnisses lässt sich nur auf zweierlei Weise erklären. Entweder sind in den Figuren beständig die Buchstaben E, F *mit einander verwechselt, d. h. der in* AB *als Anfangspunkt des Verhältnisses gegebene Punkt wird bald* E *bald* F *genannt; oder es findet wirklich eine stete Verwechslung der Verhältnissglieder statt, d. h. bald ist das in* AB, *bald das in* CD *liegende Segment das erste Glied des Verhältnisses (wie wenn im ersten Buche in Figur 10 — 25 das abzuschneidende Verhältniss bald* MH : FK *bald* FK : MH *genannt würde). Könnte nun jenes Schwanken auf die erste Art erklärt werden, so würde es dem Verke selbst nicht zum Tadel gereichen, sondern nur der Unaufmerksamkeit des Übersezers zur Last fallen. Und in Fall 7, Fall 10 bis 14 kann allerdings diese Erklärung statt finden. Die* I. *Figur stellt die Lagen des Punk-*

tes G *in allen 14 Fällen des 2ten Buches vor, genau nach Anleitung des lateinischen Textes, wenn statt* γ, ζ *die Buchstaben* E, F *gewählt und durch* E, F *die Linien* ON, PQ *parallel mit* CD, AB *gezogen werden. In Fall 7, wo der Punkt* G *im Durchschnitte der Linien* ON, PQ *liegt, hat* G *gegen* E, F *einerlei Lage und es ist also ganz einerlei, welcher von diesen Punkten als Anfangspunkt des Verhältnisses genommen wird. Man kann daher die Unregelmässigkeit in Fall 7,* I *leicht durch Vertauschung der Buchstaben* E, F *heben. Eben so hat in Fall 10—13 der Punkt* G *gegen* E, F *ganz gleichmässige Lage und verändert sie nicht, wenn man die Buchstaben* E, F *mit einander verwechselt. Nur in Fall 14 würden wir bei jener Vertauschung auch eine Versetzung des Punktes* G *in den mit * bezeichneten Raum* AEG^{7}P *vornehmen müssen; alles Übrige aber bleibt auch hier unverändert. — Die Fälle 4 bis 6 dagegen bilden mit Fall 2. 3 ein zusammenhängendes Ganze, wie aus ihrem gemeinschaftlichen, in den Beschreibungen derselben ausgesprochenen, Eintheilungsgrunde erhellet. Es sey nämlich in Fig.* II *in* AB *der Punkt* E, *in* CD *der Punkt* F *gegeben, so liegen in Fall 2 bis 6 die Punkte* G, E *auf verschiedenen Seiten der* CD, *die Punkte* G, F *aber auf einer Seite der* AB. *Verbindet man* GE, *welche* CD

in N *schneide, und zieht* GL ∓ AB: *so durchläuft der Punkt* F *alle in* MD *gegebenen Punkte und Abschnitte und seine verschiedenen Lagen bestimmen die einzelnen Fälle, wie in der Figur durch Ziffern neben* F *angedeutet ist. Offenbar kann hier keine Vertauschung der Buchstaben* E, F *angenommen werden und es sollte in allen diesen Fällen* F *der Anfangspunkt entweder des Vordergliedes oder des Hintergliedes seyn. Ausserdem ist aber in diesen Fällen das Gesetz der Einheit und Einfachheit noch durch eine verschiedene Construction verletzt worden (vergl. Fig. 32 — 40 mit Fig. 41 bis 54). Denn da die Fälle 2 — 6 auf das erste Buch zurückgeführt werden, so muss durch* G *eine Parallele nach derjenigen von den Linien* AB, CD *gezogen werden, in welcher der Durchschnittspunkt* N *der Linie* GE *oder* GF *liegt. Wird nun* GE *verbunden (Fall 2. 3), so muss nach* CD *eine Parallele* GL *gezogen werden; diese bestimmt aber zugleich die Eintheilung der Fälle 2 — 6. Wird dagegen* GF *verbunden (Fall 4 — 6), so ist ausser* GL *noch eine Parallele* GO *nach* AB *erforderlich.*

Diess scheint Halley übersehen zu haben, wenn er S. 137 seiner Ausgabe behauptet:

» *Fast das ganze zweite Buch hindurch kann* » *auf eine doppelte Weise construirt werden, o*b-» *wohl diess Apollonius verschweigt;*

»*ohne Unterschied nämlich kann aus* G »*entweder nach* AB *oder nach* CD *eine Par-* »*allele gezogen werden.*"

Ein evidenter Beweis für die Unrichtigkeit dieser Behauptung lässt sich, glaube ich, aus denjenigen Casus *herleiten, in welchen ein* maximum *oder* minimum *statt findet. Es sey in Fig.* III. IV EH:FK *das abzuschneidende Verhältniss: so lehrt die Analysis, dass*

in Fig. III *das Verhältniss* NP : FK
in Fig. IV . . . . . NP : EH

nach dem ersten Buche bestimmt werden müsse. Das Verhältniss EH : FK *erreicht aber die Gränze, wenn auch*

NP : FK *in Fig.* III,
oder . . . . . NP : EH *in Fig.* IV

die Gränze erreicht, und diese letzteren Verhältnisse sind dann von der Form

GO : a ± √b *in Fig.* III,
GL : a ± √b *in Fig.* IV.

Nun ist in Fig. III

EH : NP = EL : GO
NP : FK = GO : a ± √b
EH : FK = EL : a ± √b

und dieses Gränzverhältniss stimmt mit dem ersten Buche überein. — In Fig. IV *aber ist*

FK : NP = FO : GL
NP : EH = GL : a ± √b
EH : FK = a ± √b : FO

Gränzverhältniss, welches sowohl in Hinht der Form als der Grösse den Determinanen des ersten Buches gerade entgegengesetzt . Es scheint mir hieraus hervorzugehen, dass nicht einerlei sey, welcher von den Punkten F mit G verbunden werde; dass vielmehr jenige dazu genommen werden müsse, welr als Anfangspunkt des Verhältnisses bechtet wird. Und diese Ansicht bestätigt Apolius selbst dadurch, dass er, obwohl diess ist immer wo es möglich ist geschieht, die lle 8, 9 nicht auf das erste Buch zurückrt. Diess konnte er desswegen nicht, weil r Punkt E, wie aus der Eintheilung des Wers hervorgeht, nothwendig als Anfangspunkt s Vordergliedes zu betrachten ist und die nie GE der CD nicht begegnet. Dass aber ollonius es vorzog, selbst diejenigen Fälle, lche unabhängig vom ersten Buche gelöst wern können, auf dasselbe zu reduciren, geht s folgenden zwei Beispielen unwiderleglich rvor. Zuerst konnte augenscheinlich der 2te ll gerade so behandelt werden wie der 8te er 9te. Zweitens in Fall 6 (Fig. 51 — 54) ll das gegebene Verhältniss FK : EH abgehnitten werden. Zieht man in allen Figuren D ∓ MF und GLN ∓ ME, so ist in allen er Casus

$$FK : EP = FL : EN$$
$$= FL : GO$$
$$EP : EH = GO : OH,$$
$$\text{also} \quad FK : EH = FL : OH,$$

folglich ist OH *bekannt. Aus dieser Auflösung ergeben sich selbst die Determinationen viel kürzer als bei Apollonius. Denn es ist offenbar*

in Fig. 51 $FL : OH < FL : OE$

und in Fig. 52 $FL : OH < FL : OM$ *u. s. w. Dieselbe Bemerkung gilt auch für Fall 11 (Fig. 71 — 74).*

Eine Wiederherstellung der Fälle 4 — 6 nach den oben angedeuteten Ansichten zu unternehmen ist aber bedenklicher als es auf den ersten Anblick scheinen möchte. Denn weil die Herstellung des Verhältnisses EH : FK *noch nicht genügen würde, sondern zugleich die Construction verändert werden müsste, um sie mit der in Fall 2. 3 angewandten in Übereinstimmung zu bringen: so würden die Linien* HK *in einer andern Reihe auf einander folgen und die Determinationen in andere* Casus *verlegt werden, wie diess das folgende Schema zeigt, in welchem ein Sternchen eine Determination, zwei eine zweitheilige Determination andeuten.*

Fall 4.

Halley;		*Wiederh.*
cas. *1*	=	cas. *1*
2^{**}	=	5^{**}
3^{**}	=	4^{**}
4	=	*3*
5^{*}	=	2^{*}

Fall 5.

Halley;		*Wiederh.*
cas. *1*	=	cas. *4*
2	=	*3*
3^{*}	=	2^{*}
4^{*}	=	1^{*}
5	=	*5*

Fall 6.

Halley;		*Wiederh.*
cas. 1^{*}	=	cas. 3^{*}
2^{*}	=	2^{*}
3^{*}	=	1^{*}
4	=	*4*

Ordnet man die Casus *der Fälle 4. 5 nach ihrer Reihenfolge*

Fall 4.

Halley	*Wiederh.*
cas. *1*	cas. *1*
2^{**}	2^{*}
3^{**}	*3*
4	4^{**}
5^{*}	5^{**}

Fall 5.

Halley	*Wiederh.*
cas. *1*	cas. 1^{*}
2	2^{*}
3^{*}	*3*
4^{*}	*4*
5	*5*

so übersieht man leicht, dass die Wiederherstellung vom lateinischen Texte bedeutend abweichen würde.

Wir wenden uns nun zu der Eintheilung des Werkes. Versetzt man nach dem Obigen in Fig. I *den Punkt* G^{14} *in den Raum* $AEG^{7}P$, *so ergiebt sich folgende*

Übersicht:

I. *Die Linien* AB, CD *sind parallel (Buch* I. *Fall 1. 2).*

II. *Die Linien* AB, CD *schneiden einander (Buch* I *Fall 3 bis Buch* II *zu Ende).*

1. In AB *wird der Durchschnittspunkt* M *genommen (Buch* I *Fall 3 — 7).*

(1) *In* CD *wird der Punkt* M *genommen (Fall 3).*

(2) *In* CD *wird ein anderer Punkt* F *genommen (Fall 4 — 7).*

A) *die Punkte* G, F *liegen auf verschiedenen Seiten der* AB *(Fall 4).*

B) *die Punkte* G, F *liegen auf einer Seite der* AB *(Fall 5 — 7).*

a) *der Punkt* F *liegt in der Parallele* GL *(Fall 5).*

b) *der Punkt* F *liegt nicht in der Parallele* GL *(Fall 6. 7).*

2. In AB *wird der Punkt* E *(und in* CD *der Punkt* F*) genommen (Buch* II*).*

(1) *Die Punkte* G, E *liegen auf verschiedenen Seiten der* CD *(Fall 1 — 6).*

A) *die Punkte* G, F *liegen auf verschiedenen Seiten der* AB *(Fall 1).*

B) *die Punkte* G, F *liegen auf einer Seite der* AB *(Fall 2 — 6).*

a) *die Parallele* GL *trifft den Punkt* F *(Fall 2).*

b) *die Parallele* GL *trifft den Punkt* F *nicht (Fall 3—6).*

(*a*) *der Punkt* F *liegt jenseit* *) GL *(Fall 3).*

(*b*) *der Punkt* F *liegt diesseit* *) GL *(Fall 4—6).*

α) GE *geht nicht durch* F *(Fall 4. 5).*

β) GE *geht durch* F *(Fall 6).*

(2) *Die Punkte* G, E *liegen auf einer Seite der* CD *(Fall 7—14).*

A) *Die Linie* GE *ist* ≠ CD *(Fall 7. 8. 9).*

a) *die Parallele* GL *geht durch* F *(Fall 7).*

b) *die Parallele* GL *geht nicht durch* F *(Fall 8. 9).*

B) *Die Linie* GE *ist nicht* ≠ CD *(Fall 10—14).*

a) *der Punkt* F *liegt diesseit* GL *(Fall 10).*

b) *der Punkt* F *liegt jenseit* GL *(Fall 11—14).*

(*a*) GE *trifft die* MD *(Fall 11—13).*

(*b*) GE *trifft die* MC *(Fall 14).*

---

*) *nämlich in Bezug auf* AB.

Diese Eintheilung, welche von dem Gesichtspunkte ausgeht, dass die Lage des Punktes G *gegen den Anfangspunkt des abzuschneidenden Verhältnisses den Eintheilungsgrund bilden müsse, giebt uns Apollonius selbst an die Hand, indem er bei der Anordnung der Fälle 3 — 7 des ersten Buches offenbar folgende zwei Gesetze beobachtet: 1) der Anfangspunkt* M *behält gegen* G *eine unveränderliche Lage. 2) der Punkt* F *als Anfangspunkt des Hintergliedes verändert seine Lage gegen* G. *Da nun im 2ten Buche die Stellung des Punktes G aus seinen Lagen gegen* E, F *zusammengesetzt ist, so werden hier, wenn* E *als Anfangspunkt festgesetzt wird, die verschiedenen Lagen der Punkte* G, E *die Hauptheile, und die Lagen der Punkte* G, F *die Unterabtheilungen bilden müssen. Hieraus ergiebt sich die Eintheilung*

(1) G, E *auf verschiedenen Seiten der* CD *(Fall 1 — 6).*

(2) G, E *auf einer Seite der* CD *(Fall 7—14).*

In der zweiten Abtheilung kommt aber noch die parallele Lage der GE *als neuer Eintheilungsgrund hinzu, weil nach der oben ausgesprochenen Ansicht diejenigen Fälle, in welchen* GE ∓ CD *ist, nicht auf das erste Buch zurückgeführt werden können.*

Dass diese Eintheilung nicht allen Forderungen genüge, fällt in die Augen. Der Ein-

und, dass die 14 Fälle des zweiten Buches e möglichen Lagen des Punktes G *nicht erhöpfen, indem der Winkel* AMC *in Fig.* I *unsetzt geblieben ist, lässt sich noch damit eben, dass die hier entstehenden Fälle als erdigt durch die übrigen betrachtet werden könn. Dagegen ist es wohl den Gesetzen einer reng logischen Disposition nicht angemessen, iss am Ende beider Hauptabtheilungen dieses uches zwei und drei Fälle einem einzigen coordinirt werden, nämlich Fall 4. 5 mit Fall 6 nd Fall 11—13 mit Fall 14. Offenbar sollte lgende Anordnung statt finden: Fall 6. 4. 5 nd Fall 14. 11—13. Es ist bereits oben aus nderweitigen Gründen nachgewiesen worden, ass die Fälle 4—6 verdorben zu seyn scheien, also könnte auch wohl eine Versetzung derelben als möglich angenommen werden. Wenn ich aber auch die Ordnung derselben allenalls noch rechtfertigen lässt, so scheint diess och bei den Fällen 11—14 so wenig möglich u seyn, dass Diesterweg in seiner Bearbeiung der* Sectio Rationis *den Fall 10 ohne Weieres an das Ende des Werkes stellen zu müssen eglaubt hat. So gewagt eine solche Conjectur rscheinen mag, so erhält sie doch einen bedeutenden Grad von Wahrscheinlichkeit durch olgenden merkwürdigen Umstand. Pappus lässt auf sein 20stes Lemma eine Aufgabe fol-*

gen, welche bei **Commandinus** *die Überschrift führt:*

Problema in secundum *) **de sectione proportionis** **), utile ad epilogum tertii decimi loci.

Dieselbe Aufgabe findet sich auch bei **Halley** ***) *mit der Überschrift:*

Πρόβλημα εἰς τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς χρήσιμον εἰς τὴν τοῦ ιγ΄ τόπου ἀναλεφαλαίωσιν

oder nach seiner Übersetzung: **Problema ad secundum de Sectione Rationis, utile ad Recapitulationem Loci decimi tertii.** *Es scheint also, als ob dem Werke des Apollonius irgend ein Anhang beigefügt war, welcher mit dem 13ten Falle in Verbindung stand. Ein solcher Anhang findet sich nun in der That in der Halley'schen Ausgabe hinter dem 14ten Falle mit der Überschrift* ἀναλεφαλαίωσις. *Ist dieser Zusatz der von* **Pappus** *angedeutete und ist die Lesart zum 13ten Falle gehörig* †) *richtig,*

*) *nämlich* librum.

**) *das ist* rationis.

***) *Halley hat in seiner Ausgabe der* Sectio Rationis *die Vorrede des* **Pappus** *zum 7ten Buche seiner* Collect. Mathem. *nebst den ersten* 20 *Lemmen desselben aus zwei Handschriften der Savilianischen Bibliothek in griechischer Sprache mitgetheilt und dieselben mit der verbesserten lateinischen Übersetzung des* **Commandinus** *begleitet.*

†) *Halley bemerkt am Ende der eben erwähnten griechischen Vorrede des* **Pappus**: quæ uncis

Noch eine andere Vermuthung über den Zweck jener Aufgabe bietet sich dar. Das Gränzverhältniss des ersten Buches ist

NP : EH = GL : ER = NV : ER

Es ist also perm. . NP : NV = EH : ER

also auch . . . . . FK : FO = EH : ER,

und perm. . . . . FK : EH = FO : ER.

Nun ist aber FK : EH *das Gränzverhältniss des zweiten Buches, also auch* FO : ER. *Vielleicht sollte nun die Aufgabe des Pappus das Verhältniss* FO : ER *in ein dem ersten Buche analoges, etwa* GL : Ex, *umgestalten. — Ob uns aber die Aufgabe des Pappus richtig überliefert ist, scheint mir auch noch nicht gewiss zu seyn. Denn in der Ausgabe des Commandinus finden sich zwischen jenem Lemma und der Analysis folgende Worte:* Sed aliter constitui non potest, nisi utraeque *xN, EL* aequales sint excessui *SE,* totaque *xE* toti *EN,* et adhuc *SE, EL, LN* inter se proportionem habeant quam numerus quadratus ad quadratum numerum et *NL* ipsius *xS* sit dupla. *Diese Worte haben nun allerdings keinen Sinn und Commandinus bemerkt dazu in seinem Commentar:* Vereor, ne haec ab aliquo addita sint, non enim video cur problema aliter constitui non possit. *Aber eben daraus, dass dieser Zusatz ganz unverständlich ist, möchte man schliessen, der Glossator habe entweder eine andere Aufgabe vor sich gehabt,*

»*In einer geraden Linie sind 3 Punkte* N, L, E »*gegeben; man soll in der Verlängerung ei-*»*nen vierten* x *finden, so dass*

$$Nx : xE = Lx : EN + NL - \sqrt{4\,EN \cdot NL}$$

»*ist.* *)

Der Punkt x *wird gefunden, wenn man*

$$ES = EN + NL - \sqrt{4\,EN \cdot NL}$$

und . . $\square$ Lx . xS $=$ $\square$ NL . ES

macht. — Die natürlichste Vermuthung über den Zweck dieses Lemma wäre wohl die, dass der Punkt x *zur Bestimmung des Gränzverhältnisses dienen sollte. Macht man nun* NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* EN, NL *und* HR $=$ HL*; so wird in Fall 7 des ersten Buchs gezeigt, dass*

$$ER = ES = EN + NL - \sqrt{4\,EN \cdot NL}$$

und dass das Gränzverhältniss gleich

$$NP : EH = GL : ER$$

sey. Es ist also perm.

$$NP : GL = EH : ER$$

das ist . . . NH : HL $=$ EH : ER,

folglich leistet der Punkt H *dasselbe als der Punkt* x. *Sollte nun die Aufgabe des Pappus etwa dazu dienen, den Punkt* H *zu finden: so ist dabei zu bemerken, dass 1) der Punkt* H *(oder* x*) nicht in der verlängerten* NE *liegen darf und 2) dass er viel einfacher durch die mittlere Proportionale* NH *bestimmt wird. —*

*) *siehe Raumschnitt Lemma* 35.

ch eine andere Vermuthung über den Zweck je-
Aufgabe bietet sich dar. Das Gränzverhält-
s des ersten Buches ist

NP : EH = GL : ER = NV : ER

ist also perm. . NP : NV = EH : ER
o auch. . . . . FK : FO = EH : ER,
l perm. . . . . FK : EH = FO : ER.

n ist aber FK : EH das Gränzverhältniss des
iten Buches, also auch FO : ER. Vielleicht
te nun die Aufgabe des Pappus das Ver-
tniss FO : ER in ein dem ersten Buche ana-
es, etwa GL : Ex, umgestalten. — Ob uns
r die Aufgabe des Pappus richtig überliefert
scheint mir auch noch nicht gewiss zu seyn.
nn in der Ausgabe des Commandinus finden
h zwischen jenem Lemma und der Analysis
ende Worte: Sed aliter constitui non potest,
i utraeque *xN, EL* aequales sint excessui
, totaque *xE* toti *EN*, et adhuc *SE, EL, LN*
r se proportionem habeant quam numerus
drätus ad quadratum numerum et *NL* ip-
s *xS* sit dupla. Diese Worte haben nun al-
lings keinen Sinn und Commandinus be-
kt dazu in seinem Commentar: Vereor, ne
c ab aliquo addita sint, non enim video cur
blema aliter constitui non possit. Aber eben
aus, dass dieser Zusatz ganz unverständlich
möchte man schliessen, der Glossator habe
eder eine andere Aufgabe vor sich gehabt,

oder sie wenigstens aus einem besondern Gesichtspunkte aufgefasst.

Doch hiermit werde fernern Vermuthungen und Bemerkungen ein Ziel gesetzt, um so mehr, da zu näherer Begründung derselben eine Vergleichung des arabischen MS. mit der Halley'schen Ausgabe unumgänglich erforderlich ist. Die vorstehenden Betrachtungen wollte ich desshalb nicht unterdrücken, weil sie vielleicht dereinst einen Wiederhersteller des Apollonischen Werkes zu weiteren Untersuchungen veranlassen dürften. Ohne Zweifel wäre es für diese Bemerkungen ein wichtiger Vortheil gewesen, wenn ein so gründlicher Kenner der Apollonischen Schriften, wie Diesterweg es war, sie vor ihrer Bekanntmachung einer Prüfung hätte unterziehen wollen. Seine Gesundheit war aber (wie er mir im April v. J. aus dem Bade Eilsen schrieb) so angegriffen, dass er meine Bitte nicht erfüllen konnte. Leider traf schon wenige Wochen darauf die schmerzliche Nachricht seines zu frühen Dahinscheidens ein, und so fühle ich denn, indem ich jetzt von seiner freundlichen Erlaubniss, den vorliegenden Versuch mit seinem Namen zu zieren, Gebrauch mache, nur um so lebhafter den Wunsch, ich möchte im Stande gewesen seyn, meine Hochachtung gegen [illegible] edlen Mann durch ein weniger unvollkommenes Werk an den Tag zu legen.

In der Hoffnung dass es wünschenswerth er-
heinen möchte, die Sectio Rationis *neben der*
eien Bearbeitung, welche Diesterweg geliefert
t, auch in einer dem Original sich anschlies-
nden Übertragung zu besitzen — und diese
nsicht spricht auch der Recensent jener Be-
beitung in der Jen. Lit. Z. 1827. E. B. № 79
ts — habe ich hier den Versuch unternom-
en von dem Halley'schen Texte eine treue Über-
tzung zu liefern. Nur an einigen Stellen, wo
fenbare Unrichtigkeiten oder nothwendig aus-
füllende Lücken vorhanden waren, habe ich
ir Abweichungen erlaubt, die jedoch überall
den Noten bemerkt worden sind. Auch eine
i Anfange einer Analysis, Determination, Syn-
esis immer wiederkehrende Formel ist fast
erall weggelassen worden, weil sie im Deut-
hen auffallend und gezwungen klingen möchte.
iese Formel besteht in den Worten: maneant
scripta, *oder* manentibus descriptis, *oder* ma-
ant quae supra, *oder* manentibus autem om-
bus jam descriptis *u. s. w. Die Wörter Ana-*
sis, Determination, Synthesis sind
n mir der Deutlichkeit wegen hinzugesetzt
rden; das erste fehlt im Lateinischen gänz-
h, die beiden letzten aber werden (mit Aus-
hme einer Stelle) immer umschrieben, jenes
rch determinatur autem hunc in modum,
ses durch componetur (construetur) autem

(problema) hunc in modum *u. s. w. Die mit gesperrter Schrift gedruckten Worte fehlen im arabischen Codex und sind von Halley ergänzt.*

Die Örter, welche die Aufgaben der Sectio Rationis *lösen, sind im Wesentlichen aus der Halley'schen Ausgabe entlehnt. Ich hielt es, der Übersicht wegen und um das Apollonische Werk nicht zu unterbrechen, für zweckmässig sie im Anhange zusammen zu stellen, während Halley einen jeden Ort an der ihm gebührenden Stelle mittheilt.*

Elbing, im Januar 1836.

Der Verfasser.

Des

APOLLONIUS VON PERGA

zwei Bücher

vom

Verhältnissschnitt

(*de Sectione Rationis*).

Des

APOLLONIUS VON PERGA

vom

Verhältnissschnitt

Erstes Buch.

Es sind zwei unbegränzte gerade Linien in derselben Ebene der Lage nach gegeben, welche entweder gegenseitig parallel sind oder einander schneiden; und in jeder derselben ist ein Punkt gegeben, auch ist ein Verhältniss und überdiess ein Punkt ausserhalb der Linien gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine gerade Linie ziehen, welche von den der Lage nach gegebenen Linien Segmente abschneidet, deren Verhältniss dem gegebenen gleich ist.

Erstlich seyen die der Lage nach gegebenen Linien gegenseitig parallel, wie *AB*, *CD*; und in *AB* werde der Punkt *E*, in *CD* aber der Punkt *F* genommen. Zieht man durch *E*, *F* die Linie *EFL*, so wird der gegebene Punkt entweder im W. *DFL*, oder innerhalb der Winkel *BEF*, *EFD*, oder innerhalb der angränzenden Räume liegen.

Fall 1.

Er liege nun zuerst im $\angle$ *DFL*, wie der Punkt *G*. Die Linien aber, welche aus dem Punkte *G* ausgehend von den der Lage nach gegebenen geraden Linien den Punkten *E*, *F* anliegende Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneiden, können auf drei Arten gezogen werden; in sofern die Segmente entweder in *EB*, *FD*; oder in *EA*, *FD*; oder endlich in *EA*, *FC* genommen werden.

Cas. I. Fig. 1. *Analysis. Es werde nun nach der ersten Art eine Linie, wie* GH, *gezogen, welche von* EB, FD *die Segmente* EH, FK *abschneide, deren Verhältniss gleich dem gegebenen ist. Verbinde* EG, *so ist diese Linie der Lage nach gegeben. Es wird aber auch* CD *der Lage nach gegeben, folglich ist der Punkt* N *gegeben. Weil also die Punkte* E, N, G *gegeben sind, so ist das Verhältniss* [EN : NG *und* comp.] EG : GN *bekannt. Nun ist* EG : GN *gleich dem Verhältnisse* EH *zu* NK, *folglich ist das Verhältniss* EH : NK *gegeben. Es wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben, daher auch das Verhältniss* FK : NK, *mithin* divid. FN : NK. *Da nun die Linie* FN *der Grösse nach gegeben ist, so ist es auch* NK; *wegen des bekannten Punktes* N *ist also auch der Punkt* K *und somit die Linie* GKH *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber die Linie NK *kleiner ist als* FK, *so ist das Verhältniss* EH : NK, *oder* EG : GN *grösser als* EH : FK, *das ist, als das gegebene Verhältniss. Es muss also das gegebene Verhältniss kleiner als* EG : GN *seyn.*

Synthesis. Verbinde EG, *so muss das gegebene Verhältniss kleiner als* EG : GN *seyn. Es sey*

ılso gleich dem Verhältnisse m : no. *Wie nun* EG *:u* GN *sich verhält, so verhalte sich* m *zu* np, *welche Linie kleiner als* no *seyn wird; alsdann mache wie* op *zu* pn, *so* FN *zu* NK; *verbinde und verlängere* GK: *so behaupte ich, dass lie Linie* GKH *allein die Aufgabe löse. Diess wird so bewiesen. Weil* FN : NK = op : pn, *so ist* comp. FK : KN = on : np *und* invert. NK : KF = pn : no. *Da nun* EG : GN = EH : NK,

:o ist auch . . . . . EH : NK = m : np.

Es ist aber . . . . . NK : KF = pn : no,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : no. *Es ist also aus dem Punkte* G *eine Linie* GH *gezogen, velche die Segmente* EH, FK *abschneidet, deren Verhältniss dem gegebenen gleich ist. Folglich löst die Linie* GH *die Aufgabe. Ich behaupte aber, dass sie ıllein dieses leiste. Denn wo möglich leiste eine anlere dasselbe, wie* GP. *Die Linie* GP *schneidet also las Verhältniss* EP : FQ *gleich dem gegebenen ab. Weil aber* KN < KF, *so ist* QK : KN > QK : KF *und* :omp. QN : NK > QF : FK. *Es ist aber* QN : NK = PE : EH, *also* PE : EH > QF : FK *und* perm. EP : FQ > EH : FK. *Nun ist aber bewiesen, dass lie Linie* GH *die Aufgabe löse, und die andere leitet dieses nicht; folglich löst jene die Aufgabe allein.*

Es ist also klar, dass die dem Punkte F *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden ls die von ihm entfernteren.*

Cas. II. Fig. 2. *Analysis. Es werde nach der :weiten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* EA, FD *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen ıbschneide. Verbinde* GE, *so ist diese Linie der Lage nach gegeben; aber auch* CD, *mithin der Punkt* N, *daher auch die Linien* GE, GN, *und somit das Verhältniss* EG : GN. *Es ist aber* EG : GN = EH : NK, *folglich ist das Verhältniss* EH : NK *gegeben. Nun*

ist das Verhältniss EH : FK *gegeben, mithin auch* FK : KN *und* comp. FN : NK; *folglich, weil die Linie* FN *der Grösse nach gegeben ist, ist es auch* NK. *Der Punkt* N *ist aber bekannt, also auch der Punkt* K, *und somit ist wegen des gegebenen Punktes* G *die Linie* GKH *der Lage nach gegeben. Weil aber* KN *sowohl gleich seyn kann* KF, *als auch grösser oder kleiner, so findet keine Gränze statt.*

Synthesis. Verbinde GE, *und das gegebene Verhältniss sey gleich* m : no. *Mache* m : np = EG : GN *und* FN : NK = op : pn, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H, *so behaupte ich, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse, oder dass* EH : FK = m : no *sey. Denn weil* EG : GN = EH : NK *und auch* = m : pn, *so ist*

EH : NK = m : pn.

Ferner, weil op : pn = FN : NK, *ist* divid. *und* invert.

NK : KF = pn : no.

Folglich ist aus den Gleichen EH : FK = m : no. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe. Ich behaupte aber, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere, wie* GP, *welche das Verhältniss* EP : FQ *gleich dem gegebenen abschneide. Aber* PE *ist grösser als* EH, *und* QF *kleiner als* FK, *also das Verhältniss* EP : FQ *grösser als das Verhältniss* EH : FK; *folglich schneidet die Linie* GP *ein grösseres Verhältniss ab als* GH.

Es ist also klar, dass die dem Punkte F *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Cas. III. Fig. 3. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, welche von den Linien* EA, FC *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE, *so ist diese Linie der Lage nach gegeben. Weil nun* CD *der Lage nach gegeben ist, so ist auch der Punkt* N *und das Verhältniss* EG : GN *gegeben. Es ist*

aber EG : GN = EH : NK, *daher ist auch das Verhältniss* EH : NK *bekannt. Nun wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben; folglich ist auch* NK : FK *und* divid. NF : FK *gegeben. Da nun* NF *bekannt ist, so ist* FK *der Lage und Grösse nach bekannt. Der Punkt* F *wird aber gegeben, also auch der Punkt* K, *und weil der Punkt* G *gegeben ist, so ist auch die Linie* GKH *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil FK < KN, *so ist* EH : FK > EH : KN. *Es ist aber* EH : KN = EG : GN, *folglich ist* EH : FK > EG : GN. *Das gegebene Verhältniss muss also grösser als* EG : GN *seyn.*

Synthesis. Verbinde EG, *so muss das gegebene Verhältniss grösser als* EG : GN *seyn. Es sey also das Verhältniss* m : no *grösser als* EG : GN. *Mache* m : np = EG : GN *und* NF : FK = po : on, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H: *so behaupte ich, dass die Linie* GKH *die Aufgabe löse. Denn weil* NF : FK = po : on, *so ist* comp.

NK : KF = pn : no,

Ferner weil EG : GN *oder*

EH : NK = m : np,

und . . . . . NK : KF = pn : no,

so ist aus dem Gleichen EH : FK = m : no. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe; ich behaupte aber auch, allein. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* GP, *welche das Verhältniss* EP : FQ *gleich dem gegebenen abschneide. Weil aber* FK < KN, *so ist* QK : KF > QK : KN *und* comp. QF : FK > QN : NK. *Nun ist* QN : NK = PE : EH, *folglich* PE : EH < QF : FK *und* perm. EP : FQ < EH : FK. *Die Linie* GH *schneidet also ein grösseres Verhältniss als* GP *ab.*

Die dem Punkte F *näheren geraden Linien schneiden daher grössere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

Wir haben also das Problem nach allen Arten aufgelöst *) *und die Construction desselben gezeigt. Ziehe die Linie* EG: *so wird das gegebene Verhältniss entweder kleiner seyn als* EG : GN, *oder ihm gleich, oder endlich grösser. Ist nun das gegebene Verhältniss kleiner als* EG : GN, *so wird die Aufgabe nach zwei Arten gelöst, nämlich nach der ersten und zweiten; aber nicht nach der dritten, weil das gegebene Verhältniss nicht grösser ist als* EG : GN. *Ist das gegebene Verhältniss gleich* EG : GN, *so wird nach der zweiten Art construirt werden; nicht aber nach der ersten, weil das gegebene Verhältniss nicht kleiner ist als* EG : GN; *auch nicht nach der dritten, weil es nicht grösser als dasselbe ist. Endlich wenn das gegebene Verhältniss grösser als* EG : GN *ist, so kann die Aufgabe offenbar nach zwei Arten gelöst werden, nämlich nach der zweiten und dritten; nicht aber nach der ersten, weil das gegebene Verhältniss nicht kleiner als* EG : GN *ist.*

Fall 2.

Es sey nun der gegebene Punkt innerhalb der Winkel *BEF*, *EFD*, wie der Punkt *G*, und die durch den Punkt *G* gezogenen Linien schneiden den Punkten *E*, *F* anliegende Segmente ab, deren Verhältniss gleich dem gegebenen sey. Diess kann aber auf drei Arten geschehen. Entweder nämlich liegen die Abschnitte in *EB*, *FD*; oder in *EA*, *FD*; oder endlich in *EB*, *FC*.

Cas. I. Fig. 4. *Analysis. Es werde also nach der ersten Art eine Linie, wie* HK, *gezogen, welche von* EB, FD *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* EG *und verlängere sie nach* N: *so ist die Linie* EN *der Lage nach gegeben;*

*) Resolvimus *d. i. wir haben die Analysis gemacht.*

ber auch CD, *mithin ist der Punkt* N *und das Verältniss* EG : GN *gegeben. Es ist aber* EG : GN = EH : NK, *nd das Verhältniss* EH : FK *wird gegeben; folglich st aus dem Gleichen* FK : KN *und* comp. FN : NK *egeben. Die Linie* FN *ist aber der Grösse nach ge-eben, also auch* NK *sowohl der Grösse als Lage nach. Da nun der Punkt* N *gegeben ist, so ist es auch der Punkt* K; *folglich ist wegen des gegebenen Punktes auch die Linie* HGK *der Lage nach gegeben.*

Weil aber jede von den Linien FK, KN *grösser ls die andere seyn kann, so findet hier keine Örränze statt.*

Synthesis. *Verbinde* EG *und verlängere sie ach* N. *Das gegebene Verhältniss sey* m : no. *Mache* n : np = EG : GN, *und* NK : KF = pn : no. *) *Verinde* KG *und verlängere sie; ich behaupte, dass die Linie* KGH *die Aufgabe löse. Denn weil* EG : GN, *las ist,*

EH : KN = m : np

nd . . . . . NK : KF = pn : no

ach der Construction: so ist aus dem Gleichen EH : FK = m : no. *Folglich löst* HK *die Aufgabe. Ich behaupte ausserdem, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* PGQ. **) *Weil aber* EH > EP *und* FK < FQ, *so ist* EH : FK > EP : FQ; *mithin schneidet die Linie* HK *ein grösseres Verhältniss als* PQ *ab.*

Die dem Punkte F *näheren geraden Linien schneiden also grössere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

---

*) *Mit der Analysis übereinstimmend müsste es heissen: und* FN : NK = op : pn.

**) *Ergänze: welche dasselbe leiste, d. h. welche ein dem gegebenen gleiches Verhältniss abschneide. Diese Bemerkung gilt auch für mehrere ähnliche Stellen weiter unten.*

Linie HK *löst also die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* PQ. *Weil nun* NK > KF, *so ist* QK : KN < QK : KF *und* comp. QN : NK < QF : FK. *Es ist aber* QN : NK = PE : EH, *folglich* PE : EH < QF : FK, *und* perm. EP : FQ < EH : FK. *Die Linie* HK *löst also allein die Aufgabe.*

Es ist also klar, dass die dem Punkte F *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Wir haben also die Auflösung und auch die Construction des Problems nach seinen drei Arten gefunden. Verbinde EG *und verlängere sie nach* N: *so ist das gegebene Verhältniss entweder gleich* EG : GN *oder grösser oder kleiner. Ist es gleich dem Verhältnisse* EG : GN, *so wird die Aufgabe nur auf eine Weise gelöst werden und zwar nach der ersten Art; nämlich nicht nach der zweiten, weil das gegebene Verhältniss nicht kleiner ist als* EG : GN; *auch nicht nach der dritten, weil es nicht grösser ist als* EG : GN. *Ferner wenn das gegebene Verhältniss kleiner ist als* EG : GN, *so wird das Problem nach zwei Arten construirt werden, nämlich nach der ersten und zweiten; nicht aber nach der dritten, weil das Verhältniss nicht grösser ist als* EG : GN. *Endlich wenn das gegebene Verhältniss grösser ist als* EG : GN, *so wird die Aufgabe nach zwei Arten gelöst, nach der ersten und dritten; nicht aber nach der zweiten, weil das gegebene Verhältniss nicht kleiner ist als* EG : GN.

Fall 3.

Die der Lage nach gegebenen geraden Linien *AB*, *CD* schneiden einander im Punkte *M* und in beiden werde der gemeinschaftliche Punkt *M* genommen. Der gegebene Punkt aber wird entweder im ∠ *DMB* oder in seinem Nebenwinkel liegen. Für jeden Winkel findet

edoch dieselbe Construction wie im ∠ *DMB* statt. s sey daher der Punkt *G* im Winkel *DMB* gegeben nd es werde verlangt gerade Linien aus *G* zu zie-en, welche von den durch *M* gehenden Linien Seg-ente in dem gegebenen Verhältnisse abschneiden. iess kann aber auf drei Arten geschehen; entweder imlich wird das Verhältniss von *AM, MD*; oder on *CM, MB*; oder endlich von *BM, MD* abgeschnitten.

Cas. I. Fig. 7. *Analysis. Es werde also stlich eine Linie* GK *nach der ersten Art gezogen, elche von* AM; MD *das Verhältniss* MH : MK *gleich m gegebenen abschneide. Durch den Punkt* G *ziehe ne Linie mit* MD *parallel bis nach* L: *so ist* GL *er Lage nach gegeben. Aber auch* AB *wird der age nach gegeben, folglich ist der Punkt* L *gege-n. Weil aber das Verhältniss* MH : MK *gegeben t, so ist es auch das Verhältniss* GL : LK. *Da un* GL *bekannt ist, so ist auch* LK *der Grösse und age nach bekannt, und wegen des gegebenen Punk-s* L *auch der Punkt* K. *Es wird aber der Punkt gegeben, folglich ist die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Es ist offenbar, dass das gegebene Verhältniss kleiner seyn müsse als GL : LM.

Synthesis. Ziehe GL ∦ CD *und das gegebene Verhältniss* m : n *sey kleiner als* GL : LM. *Mache* L : LK = m : n *und verbinde* GK; *ich behaupte, ass die Linie* GK *die Aufgabe löse. Denn weil* L : LK = MH : MK *und auch* = m : n, *so ist* H : MK = m : n. *Die Linie* GK *löst also die Auf-abe. Ich behaupte ausserdem, dass sie allein die-e leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Li-ie wie* GQ. *Weil* KL < LQ, *so ist* GL : LK > GL : LQ. *s ist aber* GL : LK = MH : MK *und* GL : LQ = MP : MQ; *olglich ist* MH : MK > MP : MQ. *Daher schneidet*

GQ nicht ein Verhältniss ab, das dem gegebenen gleich ist. Aus demselben Grunde folgt, dass keine andere Linie, ausser GK allein, die Aufgabe löse.

Offenbar schneiden die dem Punkte M nähere geraden Linien grössere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.

Cas. II. Fig. 8. *Analysis.* Es sey nun nach der zweiten Art eine Linie, wie GH, gezogen, welche von CM, MB ein Verhältniss gleich dem gegebenen abschneide. Durch G sey die Linie GL mit CD parallel gezogen: so wird GL der Lage nach gegeben seyn und, weil AB der Lage nach gegeben ist, auch der Punkt L. Es ist aber das Verhältniss MH : MK gegeben, mithin auch das Verhältniss GL : LK. Da nun GL bekannt ist, so ist es LK der Grösse und Lage nach. Wegen des gegebenen Punktes L ist also der Punkt K, mithin, weil der Punkt G gegeben wird, die Linie GKH der Lage nach gegeben.

Determination. Es ist offenbar, dass das gegebene Verhältniss grösser als GL : LM seyn müsse.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n sey grösser als GL : LM. Mache GL : LK = m : n, verbinde GK und verlängere sie nach H. Ich behaupte, dass die Linie GH die Aufgabe löse und zwar allein. Denn weil GL : LK = MH : MK, so ist MH : MK = m : n. Die Linie GH löst also die Aufgabe. Ich behaupte aber auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie GP. Weil nun LQ < LK, so ist GL : LQ > GL : LK. Es ist aber GL : LQ = MP : MQ und GL : LK = MH : MK; folglich ist MP : MQ grösser als MH : MK, mithin dem gegebenen Verhältnisse nicht gleich. Die Linie GP löst also die Aufgabe nicht. Aus demselben Grunde erhellet, dass keine andere Linie ausser GH der Aufgabe genüge.

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien hneiden offenbar kleinere Verhältnisse ab als die n ihm entfernteren.*

Cas. III. Fig. 9. *Analysis. Es sey endlich ich der dritten Art eine Linie, wie* HK, *gezogen, elche von* BM, MD *ein dem gegebenen gleiches Ver- iltniss abschneide. Ziehe die Linie* GL ∓ CD, *so rd sie der Lage nach gegeben seyn. Es ist aber e Linie* MB *der Lage nach gegeben, also auch der unkt* L. *Da nun das Verhältniss* MH : MK *gege- n ist, so ist es auch das Verhältniss* GL : LK. *Es t aber* GL *der Grösse nach gegeben, daher ist* LK *r Grösse und Lage nach bekannt. Wegen des ge- benen Punktes* L *ist also der Punkt* K, *mithin, eil auch der Punkt* G *gegeben wird, die Linie* KGH *r Lage nach gegeben. Das Verhältniss ist aber cht begränzt, weil* ML *gleich seyn kann der* LK, *ler grösser oder kleiner.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey gleich : n. *Mache* GL : LK = m : n, *verbinde* GK *und ver- ngere sie nach* H; *ich behaupte, dass* HK *die Auf- abe löse. Denn weil* GL : LK **)* = m : n, *ist auch* H : MK = m : n; *folglich löst* HK *die Aufgabe. Ich haupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn o möglich ziehe eine andere, wie* PQ. *Weil nun* P > MH, *aber* MQ < MK, *so ist* MP : MQ *grösser s* MH : MK, *also dem gegebenen nicht gleich. Hier- us geht hervor, dass keine andere Linie die Auf- abe löse als* HK.

Auch erhellet, dass die dem Punkte M, *in* CD *enommen, näheren geraden Linien kleinere Verhält- isse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Wir haben also die Auflösung des Problems ach allen Arten gefunden und die Construction des-

*) Hactenus pertigit Traductio D. Bernardi. Halley.

selben gezeigt. Es bleibe die Figur nebst der Parallele GL: *so wird das gegebene Verhältniss entweder kleiner seyn als* GL : LM, *oder grösser, oder eben so gross. Ist es kleiner als* GL : LM; *so wird das Problem nach zwei Arten construirt werden, nämlich nach der ersten und dritten; nicht aber nach der zweiten, weil das gegebene Verhältniss nicht grösser ist als* GL : LM. *Ist es grösser als* GL : LM; *so wird die Aufgabe nach zwei Arten gelöst, nämlich nach der zweiten und dritten; nicht aber nach der ersten, weil das Verhältniss nicht kleiner als* GL : LM *ist. Wenn aber das gegebene Verhältniss gleich ist* GL : LM, *so kann nur nach einer Art construirt werden, nämlich nach der dritten; nicht aber nach der ersten, weil das Verhältniss nicht kleiner ist als* GL : LM; *auch nicht nach der zweiten, weil es nicht grösser als dasselbe ist.*

Fall 4.

Die Linien *AB*, *CD* schneiden einander in *M*; in *AB* werde der Punkt *F*, in *CD* aber der Punkt *M* genommen. Der gegebene Punkt wird nun entweder im Winkel *DMB*, oder im Winkel *AMD*, oder in den Nebenwinkeln derselben liegen. Er liege also zuerst im Winkel *DMB*, wie der Punkt *G*; und es werde verlangt aus dem Punkte *G* Linien zu ziehen, welche von den Linien *CD*, *AB* den Punkten *M*, *F* anliegende Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneiden. Diess kann aber auf vier verschiedene Arten geschehen; entweder nämlich werden die Segmente in *MD*, *FA*; oder in *MD*, *FM*; oder in *MC*, *FB*; oder endlich in *MD*, *FB* genommen.

Cas. I. Fig. 10. *Analysis. Es werde nun nach der ersten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* MD, FA *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem*

gebenen abschneide. Ziehe die Linie GL *mit* CD *rallel, so ist der Punkt* L *gegeben; und mache* L : FO = MH : FK. *Da der Punkt* F *gegeben ist, ist es auch der Punkt* O; *und da der Punkt* L *kannt ist, so ist die Linie* LO *gegeben. Weil nun* L : FO = MH : FK, *so ist* perm. GL : MH = FO : FK. *ist aber* GL : MH = LK : KM; *folglich ist* LK : KM OF : FK *und* convert. KL : LM = FO : OK, *mithin* LKO = □ LM . FO. *Daher ist* □ LKO *gegeben. ist also an einer gegebenen Linie, nämlich an* LO, *n Rechteck gleich einem gegebenen zu entwerfen, ssen Ergänzung ein Quadrat sey*), wodurch man e Linien* LK, KO *erhält. Daher ist der Punkt* K *kannt; und da der Punkt* G *gegeben ist, so ist* GK *r Lage nach gegeben.*

Es ist aber einleuchtend, dass diese Entwerfung mer möglich sey, weil in der Construction an der inie LO *ein Rechteck gleich* □ LM . FO *zu entwer- n ist, dessen Ergänzung ein Quadrat sey. Denn* LFO *ist grösser als* □ LM . FO.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *'ache* GL : FO = m : n *und entwirf an* LO *ein Recht- k gleich* □ LM . FO, *dessen Ergänzung ein Quadrat y. Dieses Rechteck sey* LKO. *Verbinde* GK; *ich haupte, dass die Linie* GK, *und zwar allein, die ufgabe löse, oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn eil* □ LKO = □ LM . FO, *so ist* KL : LM = FO : OK *nd* convert. LK : KM = OF : FK. *Es ist aber* LK : KM = GL : MH, *folglich ist* GL : MH = OF : FK *und* perm. L : FO = MH : FK; *und da* GL : FO = m : n, *so ist* H : FK = m : n. *Folglich löst* GK *die Aufgabe. Ich haupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn o möglich ziehe eine andere Linie, wie* GQ. *Weil*

*) *d. h. es ist eine Linie* LO *zwischen ihren Endpunkten so zu theilen, dass das Rechteck der Abschnitte einem gegebenen gleich sey.*

aber $\square LFO > \square LKO$, *so ist* $\square LKO > \square LQO$ *). *Da nun* $\square LKO$ *gleich ist dem Rechtecke* LM . FO, *so ist das Rechteck* LM . FO *grösser als das Rechteck* LQ . QO; *folglich ist* QL : LM < FO : OQ *und* convert. LQ : QM > OF : FQ. *Es ist aber* LQ : QM = GL : MP, *also* GL : MP > OF : FQ *und* perm. GL : FO > MP : FQ. *Nun ist* GL : FO = m : n, *mithin ist* m : n > MP : FQ, *weshalb die Linie* GQ *die Aufgabe nicht löst.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden grössere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

Cas. II. Fig. 11. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art eine Linie, wie* GK, *gezogen, welche von* MD, FM *Segmente* MH, FK *in dem gegebenen Verhältnisse abschneide. Durch den gegebenen Punkt* G *ziehe der* CD *die Linie* GL *parallel und mache* GL : FO = MH : FK. *Weil nun* GL *bekannt ist, so ist es auch* FO *der Grösse und Lage nach; wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* O *gegeben. Da nun* GL : FO = MH : FK, *so ist* perm. GL : MH = FO : FK. *Es ist aber* GL : MH = LK : KM, *folglich ist* FO : FK = LK : KM *und* convert. FO : OK = KL : LM, *mithin* $\square LM . FO = \square LKO$. *Nun ist* $\square LM . FO$ *gegeben, also auch* $\square LKO$, *welches an einer gegebenen geraden Linie, nämlich* LO, *so zu entwerfen ist, dass der Überschuss ein Quadrat sey* **). *Es ist also der Punkt* K *gegeben und wegen des gegebenen Punktes* G *auch die Linie* GK *der Lage nach.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GL : FO = m : n *und entwirf an der Linie* LO

*) *Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck. Lemma* 8 *Zusatz. — Wird* Q *zwischen* K, F *genommen, so ist* $\square LKO < \square LQO$.

**) *d. h. die Linie* LO *ist in der Verlängerung so zu theilen, dass das Rechteck der Abschnitte einem gegebenen gleich sey.*

ein dem □ LM . FO *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey, nämlich das* □ LKO. *Weil nun* □ LFO > □ LM . FO, *und* □ LM . FO = □ LKO, *so wird der Punkt* K *zwischen* F, M *) *fallen. Verbinde* GK, *so behaupte ich, dass sie die Aufgabe löse* **), *und zwar allein. Denn wo möglich ziehe eine andere gerade Linie, wie* GPQ. *Weil aber* MP > MH, *und* FQ < FK, *so ist* MP : FQ > MH : FK; *folglich löst* GK *die Aufgabe allein.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

Cas. III. Fig. 12. *Analysis. Es werde jetzt nach der dritten Art eine Linie wie* GH *gezogen, welche von* MC, FB *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Durch* G *ziehe die Linie* GL *parallel mit* CD, *so ist sie der Grösse nach gegeben, und der Punkt* L *ist bekannt. Mache* GL : FO = MH : FK. *Weil das Verhältniss* MH : FK *gegeben ist, so ist es auch das Verhältniss* GL : FO *und die Linie* FO *der Grösse und Lage nach. Wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* O *und, weil der Punkt* L *bekannt ist, auch die Linie* LO *gegeben. Da nun* GL : FO = MH : FK, *so ist* perm. GL : MH = OF : FK. *Es ist aber* GL : MH = LK : KM, *folglich ist* LK : KM = OF : FK *und* comp. LM : MK = OK : KF, *also* convert. ***) ML : LK = KO : OF, *daher ist* □ LM . FO = □ LKO. *Nun ist* □ LM . FO *wegen seiner bekannten Seiten gegeben; folglich ist* □ LKO

*) *Genauer: so wird der Punkt* K *zwischen* F, O *fallen. Liegt nun* O *in* MB, *so ist* □ LMO < □ LM . FO, *also* □ LMO < □ LKO, *folglich liegt* K *in diesem, und somit in jedem, Falle zwischen* F, M.

**) *Der Beweis fehlt.*

***) *Der Schluss* convert. *konnte durch Umstellung der Verhältnisse in der ersten Proportion* GL : FO = MH : FK *erspart werden.*

gegeben, an der gegebenen geraden Linie LO *so zu entwerfen, dass die Ergänzung ein Quadrat sey. Daher ist der Punkt* K *gegeben, welcher zwischen* M, L *fallen wird, weil* □ LMO *grösser ist als* □ LM . FO *oder als* □ LKO. *Weil nun auch der Punkt* G *gegeben wird, so ist die Linie* GKH *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GL : FO = m : n *und entwirf an* LO *ein dem* □ LM . FO *gleiches Rechteck, dessen Ergänzung ein Quadrat sey. Dieses Rechteck sey* □ LKO. *Verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse, indem sie ein Verhältniss* MH : FK *gleich* m : n *abschneide. Denn weil* □ LM . FO = □ LKO, *so ist* ML : LK = KO : OF *und* convert. *) LM : MK = OK : KF, *also* divid. LK : KM *oder* GL : MH = OF : FK *und* perm. GL : FO = MH : FK. *Es ist aber (nach der Construction)* GL : FO = m : n, *also ist* MH : FK = m : n *und* GH *löst die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie wie* GP. *Schneidet nun diese Linie* GP *ein Verhältniss gleich dem gegebenen oder gleich* m : n *ab, so ist* MH : FK = MP : FQ. *Es ist aber* MH : FK = GL : FO, *folglich ist* GL : FO = MP : FQ *und* perm. GL : MP = OF : FQ. *Da nun* GL : MP = LQ : QM, *so ist* LQ : QM = OF : FQ, *also* compon. *und* convert. ML : LQ = QO : OF, *mithin* □ LM . FO = □ LQO. *Aber es ist* □ LM . FO = □ LKO, *folglich ist* □ LKO = □ LQO, *welches nicht möglich ist* **). *Daher löst die Linie* GH *allein die Aufgabe.*

---

*) *Der Schluss* convert. *ist sowohl hier als noch zweimal weiter unten ganz überflüssig. Weil* ML : LK = KO : OF, *so ist* divid. MK : KL *oder* MH : GL = KF : FO *und* perm. MH : FK = GL : FO = m : n.

**) *Wäre* □ LKO = □ LQO, *so läge die Mitte der* LO *zwischen* K, Q; *also würde seyn* □ LKO > □ LMO

Angenommen aber, dass das Rechteck K . KO *oder das Rechteck* LM . FO *kleiner y als* □LQO **), so ist* ML : LQ < QO : OF, *also* nvert. LM : MQ > OQ : QF *und* divid. LQ : QM > F : FQ. *Es ist aber* LQ : QM = GL : MP, *folglich ist* L : MP > OF : FQ *und* perm. GL : FO > MP : FQ. *un ist* GL : FO = MH : FK, *folglich* MH : FK > P : FQ. *Die Linie* GH *schneidet also ein grösseres erhältniss ab als* GP, *woraus erhellet, dass*

die dem Punkte M *näheren geraden Linien klei- re Verhältnisse abschneiden als die von ihm ent- rnteren.*

Cas. IV. Fig. 13. *Analysis. Es werde endlich ich der vierten Art eine Linie, wie* HK, *gezogen, elche von* MD, FB *ein Verhältniss gleich dem gege- nen, nämlich das Verhältniss* MH : FK, *abschneide. iehe der* CD *eine Parallele, wie* GL*: so ist sie der 'rösse und Lage nach gegeben, also der Punkt* L. *Veil aber das Verhältniss* MH : FK *gegeben wird, so erde demselben das Verhältniss* GL : FO *gleich ge- acht. Da also das Verhältniss* GL : FO *und die inie* GL *gegeben ist: so ist auch* FO *gegeben sowohl r Grösse als Lage nach. Wegen des bekannten unktes* F *ist also der Punkt* O, *mithin wegen des gebenen Punktes* L *die Linie* LO *gegeben. Weil*

---

und um so mehr □LKO > □LM . FO *gegen die Construction.*

*) *d. h. angenommen, der Punkt* Q *liege zwischen* M, K; *denn dann ist* □LQO > □LKO. *Weil nämlich* □LMO > □LKO, *so ist* M *der Mitte der* LO *näher als* K *und die Mitte liegt zwischen* O, K. *Ist nun die Mitte zwischen* Q, K, *so wird, weil* M *der Mitte näher als* K *ist, gewiss auch* Q *der Mitte näher als* K *seyn. Dasselbe ist an sich klar, wenn die Mitte in* OQ *liegt; folglich ist in jedem Falle* □LQO > □LKO. **(Pappi Lemma 14).**

nun MH : FK = GL : FO, *so ist* perm. MH : GL *oder* MK : KL = KF : FO *und* divid. ML : LK = KO : OF, *also* □ LM . FO = □ LKO. *Es ist aber* □ LM . FO *gegeben, also auch* □ LKO, *welches an der bekannten* LO *so zu entwerfen ist, dass der Ueberschuss ein Quadrat sey. Folglich ist der Punkt* K, *mithin, weil die Punkte* G, K *gegeben sind, die Linie* KGH *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GL : FO = m : n *und entwirf an* LO *ein dem* □ LM . FO *gleiches Rechteck, nämlich* □ LKO, *dessen Überschuss ein Quadrat sey. Verbinde* KG *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* HK *die Aufgabe löse, oder dass sie ein Verhältniss* MH : FK *gleich* m : n *abschneide. Denn weil* □ LM . FO = □ LKO, *ist* ML : LK = KO : OF *und* comp. MK : KL = KF : FO. *Es ist aber* MK : KL = MH : GL, *folglich ist* MH : GL = KF : FO *und* perm. MH : FK = GL : FO. *Nun ist* GL : FO = m : n, *folglich ist auch* MH : FK = m : n. *Die Linie* HK *löst also die Aufgabe; ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere, wie* PQ. *Schneidet nun diese Linie ein dem Verhältnisse* m : n *gleiches Verhältniss ab, so ist* MP : FQ = MH : FK. *Es ist aber* MH : FK = GL : FO, *folglich ist* MP : FQ = GL : FO *und* perm. MP : GL = QF : FO. *Nun ist* MP : GL = MQ : QL, *also* MQ : QL = QF : FO *und* divid. ML : LQ = QO : OF, *folglich* □ LM . FO = □ LQO. *Weil aber* □ LM . FO = □ LKO, *so ist* □ LKO = □ LQO. *Diess ist aber nicht möglich, folglich löst* HK *allein die Aufgabe.*

Welche aber von jenen Linien ein grösseres Verhältniss abschneide, wird auf folgende Weise bestimmt. Weil □ LKO *oder* □ LM . FO *grösser ist als* □ LQO *), *

*) *Vorausgesetzt nämlich, dass* Q *zwischen* L *und* K *liegt. Dass aber* PQ *die Aufgabe nicht löse, sondern ein grösseres Verhältniss als* HK *ab-*

ist ML : LQ > QO : OF *und* comp. MQ : QL > QF : FO. *s ist aber* MQ : QL = MP : GL, *also* MP : GL > QF : FO *nd* perm. MP : FQ > GL : FO. *Nun ist* GL : FO = H : FK, *folglich ist* MP : FQ > MH : FK; *mithin hneidet die Linie* HK *ein kleineres Verhältniss 's* PQ *ab.*

Hieraus geht hervor, dass die dem Punkte M *nä-ren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschnei-n als die von ihm entfernteren.*

Die Aufgabe ist also unter allen Umständen mög-h und kann nach allen vorgetragenen Arten gelöst erden, aber nur auf eine Weise, denn in keiner findet ne Gränze statt.

Fall 5.

Der gegebene Punkt *G* sey im Winkel *CMA*; und enn durch *G* eine Linie mit *AB* parallel gezogen wird, kann der Punkt *F* in der Linie *CM* entweder nseit oder diesseit der Parallele, oder in ihr selbst nommen werden. Er liege aber zuerst in der Paral-le selbst; so lassen sich gerade Linien aus dem Punkte auf drei verschiedene Arten ziehen: entweder näm-h wird das Verhältniss von *MA*, *FC*; oder von *MB*, *M*; oder endlich von *MA*, *FD* abgeschnitten.

Cas. I. Fig. 14. *Analysis. Zuerst nun werde ach der ersten Art eine Linie gezogen, welche von* A, FC *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebe-n abschneide. Mache* GF : FO = MH : FK. *Weil 'so das Verhältniss* GF : FO, *und* GF *selbst gegeben t, so ist es auch* FO. *Wegen des gegebenen Punk-s* F *ist also der Punkt* O *bekannt* *). *Da nun*

---

schneide, lässt sich kürzer so zeigen: Weil MP > MH *und* FQ < FK, *so ist* MP : FQ > MH : FK (Pappi Lemma 11).

*) *Im Lat. folgt hier, so wie auch in* Cas. 2. 3. 4, *noch: „und daher ist die Linie* FO *der Grösse*

MH : FK = GF : FO, *so ist* perm. MH : GF = KF : FO. *Es ist aber* MH : GF = MK : KF, *folglich ist* MK : KF = KF : FO, *und* divid. MF : FK = KO : OF, *mithin* □ MFO = □ FKO. *Nun ist* □ MFO *gegeben, also auch* □ FKO, *welches an der gegebenen Linie* FO *so zu entwerfen ist, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Folglich ist der Punkt* K *bekannt; und weil der Punkt* G *gegeben wird, so ist auch die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GF : FO = m : n *und entwirf an* FO *ein dem* □ MFO *gleiches Rechteck, wie* □ FKO, *dessen Überschuss ein Quadrat sey. Verbinde* GK *und verlängere sie nach* H; *ich behaupte, dass* HK *die Aufgabe löse oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn weil* □ MFO = □ FKO, *so ist* MF : FK = KO : OF *und* comp. MK : KF *wie* KF : FO. *Es ist aber* MK : KF *wie* MH : GF, *folglich ist* MH : GF = KF : FO *und* perm. MH : FK = GF : FO. *Nun ist (nach der Construction)* GF : FO = m : n, *folglich ist* MH : FK = m : n *und die Linie* HK *löst die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* PQ. *Schneidet nun diese ein Verhältniss gleich* m : n *ab, so ist* MH : FK = MP : FQ, *und da* MH : FK = GF : FO, *so ist* GF : FO = MP : FQ *und* perm. MP : GF = QF : FO. *Es ist aber* MP : GF = MQ : QF, *folglich ist* MQ : QF = QF : FO, *also* divid. MF : FQ *wie* QO : OF, *mithin Rechteck* MFO *gleich* □ FQO. *Nun ist* □ MFO = □ FKO, *folglich ist* □ FKO = □ FQO. *Diess ist aber nicht möglich, mithin löst* HK *allein die Aufgabe* *). *Weil aber*

---

und Lage nach gegeben". Diess ist ein Cirkel, denn daraus, dass FO *der Grösse und Lage nach gegeben ist, folgt erst, dass der Punkt* O *bekannt ist.*

*) *Dieser Beweis dafür, dass* PQ *die Aufgabe nicht löse, ist überflüssig, indem sich dasselbe aus*

P > MH, *dagegen* FQ < FK, *so ist* MP : FQ > MH : FK; *die Linie* HK *schneidet daher ein kleineres Verhältniss ab als* PQ.

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden also kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.*

Cas. II. Fig. 15. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* HK *gezogen, welche von* MB, FM *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Dem gegebenen Verhältnisse* MH : FK *gleich sey das Verhältniss* GF : FO. *Da also das Verhältniss* GF : FO *und* GF *selbst gegeben ist, so ist auch* FO *gegeben; und da der Punkt* F *gegeben wird, so ist der Punkt* O *bekannt. Weil nun* MH : FK = GF : FO, *so ist* perm. MH : GF *oder* HK : KF = KF : FO *und* comp. MF : FK = KO : OF, *also* □ MFO = □ FKO. *Entwirft man also dieses Rechteck an* FO *so, dass der Überschuss ein Quadrat ist, so erhält man den Punkt* K, *welcher immer zwischen* M, F *fallen wird* *). *Und da der Punkt* G *gegeben wird, so ist die Linie* GKH *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GF : FO *gleich demselben und entwirf an* FO *ein dem* □ MFO *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey. Es sey* FKO *dieses Rechteck, verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn weil* □ MFO = □ FKO, *so ist* MF : FK = KO : OF *und* divid. MK : KF = KF : FO. *Es ist aber* MH : GF = MK : KF, *folglich ist* MH : GF = KF : FO *und* perm. MH : FK = GF : FO. *Nun ist*

---

dem Folgenden ergiebt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für Cas. II.

*) *Weil* □ MFO *oder* □ FKO *kleiner ist als* □ FMO.

Grösse und Lage nach. Wegen der gegebenen Punkte M, K *und* F *ist also* FK *gegeben, welcher* KO *gleich ist, mithin ist* KO *der Grösse und Lage nach gegeben. Wegen des gegebenen Punktes* K *ist also der Punkt* O *gegeben. Der gesuchte Punkt also, welcher das Gränzverhältniss bestimmt, ist der Punkt* O. *Ich behaupte ausserdem, dass, wenn* GK *verbunden wird,* MH : FK = GF : FO *sey. Denn die Linie* KM *ist die Hälfte von* FK, *wie* FK *die Hälfte von* FO; *folglich ist* OF : FK = FK : KM *das ist* = GF : MH *und* perm. GF : FO = MH : FK. *Man erhält also jenes äusserste Verhältniss, wenn* KM *gleich* MF *gemacht und* GK *verbunden wird.*

Es ist nun aber zu untersuchen, ob diese Linie GK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss abschneide als jede andere aus* G *nach* MA, FD *gehende Linie. Diess wird auf folgende Weise bestimmt.*

Mache KM = MF *und verbinde* GK: *so ist zu untersuchen, ob die Linie* GK *ein grösseres* *) *Verhältniss* MH : FK *als jede andere Linie abschneide, die aus* G *nach* MA, FD *gezogen wird. Mache* OK = KF, *so wird* □ MFO = □ FKO, *und* MH : FK = GF : FO *oder* = GF : 4 FM **) *seyn. Ziehe nun eine andere Linie wie* GQ, *so ist das Verhältniss* MH : FK *zu vergleichen mit* MP : FQ. *Und da* MH : FK = GF : FO, *so ist* GF : FO *zu vergleichen mit* MP : FQ *und* perm. GF : MP *mit* OF : FQ. *Nun ist* GF : MP = FQ : QM; *es werde also* FQ : QM *verglichen mit* OF : FQ *und* convert. QF : FM *mit* FO : OQ, *also* □ MFO *mit* □ FQO. *Es ist aber* □ FKO = □ MFO, *mithin werde* □ FKO *mit* □ FQO *verglichen. Nun ist aber offenbar* □ FKO > □ FQO, *weil* K *die Mitte von* FO *ist;*

---

*) *Ergänze: „oder kleineres".*

**) *Die Worte: „oder* = GF : 4 FM", *scheinen mir ein Glossem zu seyn.*

Folglich ist $\square FQO < \square FKO$ *und, weil* $\square MFO = \square FKO$, *auch* $\square FQO < \square MFO$. *Daher ist* $QF : FM < FO : OQ$ *und* convert. $FQ : QM > OF : FQ$. *Nun ist* $FQ : QM = GF : MP$, *mithin ist* $GF : MP > OF : FQ$ *und* perm. $GF : FO > MP : FQ$. *Es ist aber* $GF : FO = MH : FK$, *folglich ist* $MH : FK > MP : FQ$. *Die Linie* GK *schneidet also ein grösseres Verhältniss als* GQ *ab, woraus hervorgeht, dass das Verhältniss* $MH : FK$ *grösser sey als jedes andere, welches durch irgend eine aus* G *nach* MA, FD *gehende Linie abgeschnitten werden kann.*

Ich behaupte auch, dass die der GK *näheren geraden Linien immer grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren. Denn weil* $MP : FQ < MH : FK$ *und* $MH : FK = GF : FO$, *so ist* $MP : FQ < GF : FO$. *Es verhalte sich also, wie* MP *zu* FQ, *so* GF *zu einer andern Linie, wie* FZ: *so ist dieselbe grösser als* FQ **), und aus der vorhergehenden Analysis geht hervor, dass* $\square MFZ = \square FQZ$ *sey wegen der gleichen Verhältnisse* $MP : FQ$ *und* $GF : FZ$. *Ziehe nun eine andere gerade Linie wie* GS ***), und vergleiche das Verhältniss* $MP : FQ$ *mit* $MR : FS$. *Es ist aber* $MP : FQ = GF : FZ$, *also werde* perm. $GF : MR$ *mit* $ZF : FS$ *verglichen. Nun ist* $GF : MR = FS : SM$, *folglich ist das Verhältniss* $FS : SM$ *zu vergleichen mit* $ZF : FS$ *und* convert. $SF : FM$ *mit* $FZ : ZS$, *also* $\square MFZ$ *mit* $\square FSZ$. *Aber* $\square MFZ$ *ist gleich* $\square FQZ$, *vergleiche daher* $\square FQZ$ *mit* $\square FSZ$. *Auch werde* $\square FKZ$ *mit* $\square FQZ$ *ver-*

---

*) *Im Lat. folgt hier noch:* „*folglich ist* $MP : FQ = GF : FZ$".

**) *welche nämlich weiter als* GQ *von* GK *entfernt ist und mit* GQ *auf einer Seite der* GK *liegt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für Fall* 6, II. IV. *Fall* 7, II. IV. *Vergl. die zweite Anm. zum Raumschnitt.*

glichen, also, weil □ MFZ = □ FQZ *ist,* □ FKZ □ MFZ. *Es ist aber bewiesen worden, dass* □ FK = □ MFO *ist. Zieht man nun*

das Rechteck FKO *vom Rechtecke* FKI *und das Rechteck* MFO *vom Rechtecke* MFI *ab, so bleiben als Reste die Rechtecke* FK.OZ *und* FM.OZ. *Es werde also* □ FK.OZ *mit* □ FM.OZ *verglichen. Nun ist aber klar, dass* □ FK.OZ > □ FM.OZ *sey; addirt man also dieselben zu den gleichen Rechtecken* FKO *und* MFO, *so ist* □ FKZ > □ MFZ. *Es ist aber* □ MFZ = □ FQZ, *daher ist* □ FKZ > □ FQZ. *Wird also irgend ein Punkt* S *gegeben* *), *so ist* □ FQZ > □ FSZ. *Es ist aber* □ MFZ = □ FQZ, *folglich ist das Rechteck* MFZ *grösser als das Rechteck* FSZ, *mithin ist* SF : FM < FZ : ZS *und* convert. FS *zu* SM *grösser als* ZF *zu* FS. *Nun ist* FS : SM = GF : MR, *folglich ist* GF : MR > ZF : FS *und* perm. GF : FZ *grösser als* MR : FS. *Aber es ist* GF : FZ = MP : FQ; *folglich ist* MP : FQ > MR : FS. *Die Linie* GQ *schneidet also ein grösseres Verhältniss als* GS *ab. Hieraus geht hervor, dass die der* GK *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse bestimmen als die von ihr entfernteren.*

Auch erhellet aus der obigen Construction, dass das grösste Verhältniss MH : FK *gleich sey dem Verhältnisse* GF : 4 FM, *weil* OF = 4 FM *ist.*

Synthesis. Mache KM = MF *und verbinde* GK. *Diese Linie* GK *wird ein grösseres Verhältniss abschneiden als jede andere aus* G *nach* MA, FD *gezogene Linie. Das gegebene Verhältniss wird aber entweder gleich seyn* MH : FK, *das ist (nach dem Vorigen)* GF : 4 FM, *oder grösser als* MH : FK, *oder kleiner. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich* MH : FK, *so löst die Linie* GK *die Aufgabe; und zwar allein,*

*) *mit der oben angegebenen Beschränkung.*

weil die ihr näheren geraden Linien immer grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren. Ist aber das Verhältniss grösser als MH : FK, *so ist das Problem unmöglich, weil das gegebene Verhältniss grösser ist als das grösste. Wenn dagegen das Verhältniss* m : n *kleiner ist als* MH : FK, *so mache* OK = KF; *dann ist* □ MFO = □ FKO *und* MH : FK = GF : FO. *Weil aber* m : n < GF : FO, *so sey* GF : FZ = m : n, *so ist* FZ > FO. *Da nun* KF > FM, *so ist*

□ FK . OZ > □ FM . OZ,

Es ist aber ..... □ FK . KO = □ FM . FO,

Fügt man also zum □ FK . KO *das* □ FK . OZ *und zum* □ FM . FO *das* □ FM . OZ

hinzu, so wird das ganze □ FKZ *grösser seyn als das ganze* □ MFZ. *Es wird desshalb möglich seyn an der Linie* FZ *ein Rechteck gleich* □ MFZ *zu entwerfen, (dessen Ergänzung ein Quadrat sey,)* *) *und zwar auf zweierlei Weise, nämlich zu beiden Seiten des Punktes* K; *wodurch man die gesuchten Punkte, nämlich* Q *und* q, *erhält. Verbinde* GQ *und* Gq; *ich behaupte, dass beide Linien die Aufgabe lösen. Denn weil* □ MFZ = □ FQZ, *so ist* QF : FM = FZ : ZQ *und* convert. FQ : QM = ZF : FQ. *Es ist aber* FQ : QM = GF : MP, *folglich ist* GF : MP = ZF : FQ *und* perm. GF : FZ = MP : FQ. *Nun ist* GF : FZ = m : n, *folglich ist* m : n = MP : FQ; *mithin löst* GQ *die Aufgabe. Und eben so wird bewiesen, dass die Linie* Gq *dasselbe leiste. Beide Linien* GQ, Gq *also genügen der Aufgabe.* **)

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

**) *Vielleicht möchte hier noch zu ergänzen seyn:* Ac manifestum est, rectas ab utraque parte propiores ipsi *GK* auferre rationes majores quam quae fecantur a remotioribus ab eadem.

Wir haben also die Auflösung des Problems nach allen seinen Arten gefunden und die Construction desselben gezeigt. Zieht man aber die Parallele, so wird das gegebene Verhältniss entweder gleich sey GF : 4 FM, *oder grösser, oder kleiner. Ist es gleich demselben, so wird die Aufgabe nach der ersten und zweiten Art und auf eine Weise nach der dritten gelöst. Ist es grösser, so kann zwiefach construirt werden, nämlich nach der ersten und zweiten Art. Ist aber das Verhältniss kleiner, dann kann die Construction auf viererlei Weise geschehen, nämlich nach der ersten und zweiten Art, und doppelt nach der dritten.*

Fall 6.

Es treffe nun die Linie *GL*, welche durch *G* der *AB* parallel gezogen wird, die *CD* jenseit des Punktes *F*, das ist, der Punkt *F* liege zwischen ihr und dem Punkte *M*. Durch *G* lassen sich alsdann Linien nach vier Arten ziehen; entweder nämlich werden sie von *MA*, *FC* das Verhältniss abschneiden; oder von *MB*, *FC*; oder von *MB*, *FM*; oder endlich von *MA*, *FD*.

Cas. I. Fig. 17. *Analysis. Es werde also nach der ersten Art eine Linie* HK *gezogen, welche von* MA, FC *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO *gleich dem Verhältnisse* MH : FK. *Da* GL *gegeben ist, so ist es auch* FO *der Grösse und Lage nach; und da der Punkt* F *gegeben wird, so ist auch der Punkt* O *gegeben* *). *Weil nun* MH : FK = GL : FO, *so ist* perm. MH : GL = KF : FO. *Es ist aber* MH : GL = MK : KL, *folglich ist* MK : KL = KF : FO *und* divid. ML : LK *wie* KO : OF, *mithin ist das Rechteck*

*) *Ergänze: folglich ist* LO *der Grösse und Lage nach gegeben.*

ML . FO *gleich* □ LKO. *Das* □ ML . FO *ist aber gegeben, weil beide Seiten desselben gegeben sind; folglich ist auch* □ LKO *gegeben, welches an der gegebenen* LO *so entworfen werden muss, dass der Überschuss ein Quadrat ist. Folglich ist der Punkt* K *und die Linie* HK *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GL : FO = m : n *und entwirf an* LO *ein dem* □ ML . FO *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey, nämlich das* □ LKO, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* HK *die Aufgabe löse oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn weil* □ ML . FO = □ LKO, *so ist* ML : LK = KO : OF *und* comp. MK : KL *oder* MH : GL = KF : FO, *also* perm. MH : FK = GL : FO. *Nun ist* GL : FO = n : n, *folglich löst die Linie* HK *die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* PQ. *Schneidet nun* PQ *ein Verhältniss gleich* m : n *ab, so ist das Verhältniss* MP : FQ *gleich dem Verhältnisse* MH : FK. *Diess ist aber nicht möglich, weil es offenbar kleiner als jenes ist.*

Es ist also klar, dass die dem Punkte M *näheren geraden Linien, wie* PQ **), kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren.*

Cas. II. Fig. 18. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* MB, FC *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK. *Weil* GL *gegeben ist, so ist* FO *der Grösse und Lage nach bekannt. Wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* O *bekannt, folglich ist, weil der Punkt* L *bekannt ist, auch die Linie* LO *der Grösse und Lage nach gegeben. Weil nun* MH : FK = GL : FO, *so*

*) *Die Worte „wie* PQ" *müssen gestrichen werden.*

ist perm. MH : GL = KF : FO. *Es ist aber* MH : GL = MK : KL, *folglich ist* MK : KL *gleich* KF : FO, *und* comp. ML : LK = KO : OF; *mithin ist Rechteck* ML . FO *gleich Rechteck* LK . KO. *Es ist aber* □ ML . FO *gegeben, weil beide Seiten desselben gegeben sind; folglich ist auch* □ LKO *bekannt. Entwirft man also dasselbe an* LO, *so dass die Ergänzung ein Quadrat ist, so erhält man den Punkt* K. *Und weil der Punkt* G *gegeben wird, so ist die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber in der Construction das Verhältniss GL : FO *gleich dem gegebenen gemacht und an* LO *ein dem* □ ML . FO *gleiches Rechteck entworfen werden muss, dessen Ergänzung ein Quadrat sey: so wird der Punkt* K *in der Linie* LF *liegen. Aber nicht immer ist es möglich die gesuchte Linie zu ziehen. Wenn nämlich das* □ ML . FO *grösser ist als das Quadrat der halben* LO, *so kann die Entwerfung nicht geschehen, und desshalb kann das Problem nicht immer und in allen Fällen construirt werden.*

Nur auf eine Weise aber geschieht diess, wenn die durch G *gezogene Linie die* LO *in ihrer Mitte* K *trifft, so dass zugleich* □ LKO *gleich ist* □ ML . FO *und somit der Aufgabe Genüge geleistet wird. Wir werden aber jenes äusserste Verhältniss erhalten, wenn wir das Verhältniss* GL : FO *demselben gleich setzen und nach Halbirung der* LO *in* K *annehmen, dass* □ LKO = □ ML . FO *sey. Wir haben also einen solchen Punkt* O *in* FD *zu suchen, dass, wenn* LO *in* K *halbirt wird,* □ LKO = □ ML . FO *ist. Es wird also seyn* ML : LK = KO : OF *und* convert. LM : MK = OK : KF. *Es ist aber* OK = KL, *folglich* LM : MK = LK : KF, *also* perm. ML : LK = MK : KF *und* convert. LM : MK = KM : MF; *folglich ist* MK *die mittlere Proportionale zwischen* LM *und* MF. *Nun sind aber*

beide Linien LM, MF *gegeben, also auch* MK *der Grösse und Lage nach. Wegen des gegebenen Punktes* M *ist also der Punkt* K *gegeben und somit wegen des bekannten Punktes* L *die Linie* LK, *welcher* KO *gleich ist. Folglich, weil der Punkt* K *gegeben ist, ist auch der Punkt* O *gegeben.*

Die Construction dieser Aufgabe ist also folgende. Nimm die mittlere Proportionale zwischen LM, MF, *sie sey* MK; *so ist klar, dass* LK > KF *ist. Denn weil* LM : MK = KM : MF, *so wird die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder, oder* LK *zu* KF, *in demselben Verhältnisse seyn. Es ist aber* LM > MK, *also auch* LK > KF. *Mache nun* OK = KL **), so wird der Punkt* O *der gesuchte seyn, das ist, es wird* □ ML . FO = □ LKO *seyn. Denn weil* LM : MK = KM : MF, *so ist* convert. *und* perm. LM : MK = LK : KF. *Aber* LK *ist gleich* KO, *folglich ist* LM : MK = OK : KF *und* convert. ML : LK = KO : OF, *mithin* □ LM . FO = □ LKO. *Verbinde nun* GK *und verlängere sie, so behaupte ich, dass die Linie* GH *das Verlangte leiste, oder dass* MH : FK = GL : FO *sey. Denn weil* □ ML . FO = □ LKO, *so ist* ML *zu* LK *gleich* KO *zu* OF *und* divid. MK : KL = KF : FO. *Es ist aber* MK : KL = MH : GL, *folglich ist* MH *zu* GL *wie* KF *zu* FO *und* perm. MH : FK = GL : FO. *Man construirt also richtig, wenn* MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *genommen und* GK *verbunden und nach* H *verlängert wird.*

Es ist nun zu untersuchen, ob die Linie GK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss* MH : FK *als alle übrigen geraden Linien abschneide, die aus* G *nach* MB, FC *gezogen werden können. Diess wird auf*

---

*) *so wird der Punkt* O *in der Verlängerung von* KF *liegen.*

folgende Weise bestimmt. Es bleibe die Figur nebst der Parallele, nimm die mittlere Proportionale zwischen LM, MF, *sie sey* MK; *verbinde* GK *und verlängere sie; so ist zu bestimmen, ob die Linie* GK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss* MH : FK *als jede andere Linie abschneide, die aus* G *nach* MB, FC *gezogen werden kann. Mache* OK = KL, *so ist* □ ML . FO = □ LKO *und* MH : FK = GL : FO. *Ziehe nun eine andere Linie, wie* GP, *so ist das Verhältniss* MP : FQ *zu vergleichen mit* MH : FK, *also, weil* MH : FK = GL : FO *ist,* MP : FQ *mit* GL : FO *und* perm. MP : GL *mit dem Verhältnisse* QF : FO. *Da nun aber das Verhältniss* MP : GL *gleich ist dem Verhältnisse* MQ : QL, *so werde* MQ : QL *verglichen mit* QF : FO, *und* comp. ML : LQ *mit* QO : OF, *mithin* □ ML . FO *mit* □ LQO. *Nun ist aber offenbar* □ LKO > □ LQO, *weil der Punkt* K *die Linie* LO *halbirt, und es ist* □ ML . FO = □ LKO; *folglich ist* □ ML . FO > □ LQO. *Daher ist* ML : LQ > QO : OF *und* divid. MQ : QL > QF : FO. *Es ist aber* MQ : QL = MP : GL, *folglich ist* MP : GL > QF : FO *und* perm. MP : FQ > GL : FO, *mithin, weil* GL : FO = MH : FK *ist,* MP : FQ > MH : FK. *Die Linie* GH *schneidet also ein kleineres Verhältniss als* GP *ab; woraus hervorgeht, dass* GH *ein kleineres Verhältniss abschneide als jede beliebige Linie, welche aus* G *nach* MB, FC *gezogen werden kann.*

Weil nun aber die Linie GH *ein kleineres Verhältniss als jede andere aus* G *nach* MB, FC *mögliche Linie abschneidet: so behaupte ich auch, dass die der* GH *näheren kleinere Verhältnisse bestimmen als die von ihr entfernteren. Denn weil* MP : FQ *grösser ist als* MH : FK, *das ist, als* GL : FO, *so sey* GL *zu einer andern Linie* FZ *gleich* MP : FQ, *welche folglich kleiner als* FO *seyn wird. Dann wird, wie aus dem Vorigen erhellet,* □ ML . FZ = □ LQZ; *seyn.*

Da nun MP : FQ = GL : FZ *ist, so werde eine andere Linie, wie* GR, *gezogen und das Verhältniss* MR : FS *verglichen mit* MP : FQ. *Weil aber* MP : FQ = GL : FZ, *so vergleiche* MR : FS *mit* GL : FZ *und* perm. MR : GL *mit* SF : FZ. *Nun ist* MR : GL = MS : SL, *folglich werde (*MS : SL *mit* SF : FZ *und)* *) comp. ML : LS *mit* SZ : ZF, *und* □ ML . FZ *mit* □ LSZ *verglichen. Es ist aber* □ ML . FZ = □ LQZ, *folglich werde* □ LQZ *verglichen mit* □ LSZ. *Vergleiche auch* □ LKZ *mit* □ LQZ *oder, weil* □ ML . FZ = □ LQZ *ist,* □ LKZ *mit* □ ML . FZ. *Nun ist* □ ML . FO = □ LKO *und, wenn man*

von □ ML . FO *das* □ ML . FZ

und von □ LKO *das* □ LKZ

abzieht, der Rest □ ML . OZ *grösser als der Rest* □ LK . OZ. *Weil also*

□ ML . FO = □ LKO

und □ ML . OZ > □ LK . OZ,

so ist □ ML . FZ < □ LKZ, *mithin auch, weil* □ LQZ = □ ML . FZ *ist,* □ LQZ < □ LKZ. *Hieraus aber folgt, dass* □ LQZ > □ LSZ *ist. Da nun* □ LQZ = □ ML . FZ, *so ist* □ ML . FZ > □ LSZ, *folglich* ML : LS > SZ : ZF *und* divid. MS : SL, *das ist* MR : GL > SF : FZ, *mithin* perm. MR : FS > GL : FZ. *Es ist aber* GL : FZ = MP : FQ, *folglich ist* MR : FS > MP : FQ. *Die Linie* GP *schneidet also ein kleineres Verhältniss als* GS *ab. Nun ist* GP *der* GH *näher als* GS, *folglich schneiden die der* GH *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse ab als die von ihr entfernteren.*

Synthesis. Nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM *und* MF, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H: *so schneidet* GH *das Verhältniss* MH : FK *ab (welches kleiner ist als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* MB, FC*).* *)

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

Das gegebene Verhältniss aber wird entweder das Verhältniss MH : FK *selbst seyn, oder kleiner, oder grösser als dasselbe. Ist nun das Verhältniss gleich* MH : FK, *so genügt die Linie* GH *der Aufgabe, und es ist klar, dass sie allein dieses leiste. Ist es kleiner als* MH : FK, *so ist die Aufgabe unmöglich. Ist aber das gegebene Verhältniss, nämlich* m : n, *grösser als* MH : FK, *so mache* OK = KL; *alsdann wird* □ ML . FO = □ LKO *und* MH : FK = GL : FO *seyn. Weil nun* m : n *grösser ist als* MH : FK *das ist als* GL : FO; *so mache* GL : FZ = m : n, *so wird* FZ < FO *seyn. Es ist aber*

$$\square ML \cdot FO = \square LKO$$

und

$$\square ML \cdot OZ > \square LK \cdot OZ,$$

folglich ist □ ML . FZ < □ LKZ, *mithin ist es möglich jenes Rechteck an der Linie* LZ *zu entwerfen. Es werde also an* LZ *ein dem* □ ML . FZ *gleiches Rechteck entworfen, dessen Ergänzung ein Quadrat sey, zu beiden Seiten des Punktes* K; *so erhält man die Punkte* Q *und* q. *Verbinde* GQ, Gq *und verlängere sie nach* P, p. *Ich behaupte, dass beide Linien* GP, Gp *der Aufgabe genügen oder dass das Verhältniss* m : n *gleich sey* MP : FQ *oder* Mp : Fq. *Denn weil* □ ML . FZ = □ LQZ, *so ist* ML : LQ = QZ : ZF *und* divid. MQ : QL = QF : FZ. *Nun ist* MQ : QL = MP : GL, *mithin ist* MP : GL = QF : FZ *und* perm. MP : FQ = GL : FZ. *Es ist aber* GL : FZ = m : n, *folglich ist* MP : FQ = m : n. *(Die Linie* GP *löst also die Aufgabe. Eben so aber wird bewiesen, dass* Mp : Fq = m : n *sey.)* *) *Folglich löst jede von den Linien* GP, Gp *die Aufgabe; und es ist klar, dass die der* GH *zu beiden Seiten näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.*

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

Die Gränze des Verhältnisses aber wird so bestimmt. Es ist MH : FK = GL : FO. *Nun ist* FO *der Überschuss der Linien* LM, MF *zusammengenommen über* LM, MO; *und* LM, MO *zusammengenommen sind gleich dem Doppelten der* MK, *weil* LK = KO *ist; das Quadrat von* 2 MK *aber ist gleich dem vierfachen* □ LMF, *weil* MK *die mittlere Proportionale zwischen* LM *und* MF *ist. Daher ist* FO *der Überschuss, um welchen* LM, MF *zusammengenommen diejenige Linie übertreffen, deren Quadrat viermal so gross ist als* □ LMF. *Folglich ist das Verhältniss* MH : FK *(welches kleiner ist als jedes Verhältniss, welches durch Linien aus* G *nach* MB, FC *abgeschnitten wird) gleich dem Verhältnisse der Linie* GL *zum Überschusse, um welchen* LM, MF *zusammengenommen übertreffen diejenige Linie, deren Quadrat gleich* 4 □ LMF *ist.*

Cas. III. Fig. 19. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* MB, FM *die Segmente* MH, FK *in dem gegebenen Verhältnisse abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK. *Weil* GL *gegeben ist, so wird* FO *der Grösse und Lage nach gegeben seyn. Da aber der Punkt* F *gegeben wird, so ist der Punkt* O *gegeben, also wird wegen des bekannten Punktes* L *die Linie* LO *der Grösse und Lage nach gegeben. Weil nun* MH : FK = GL : FO, *so ist* perm. MH *zu* GL *wie* KF *zu* FO. *Es ist aber* MH : GL *gleich* MK : KL, *folglich ist* MK : KL = KF : FO *und* comp. ML : LK = KO : OF, *also* □ ML . FO = □ LKO. *Nun wird* □ ML . FO *gegeben, weil beide Linien* ML, FO *gegeben sind; folglich ist auch* □ LKO *gegeben. Wird also jenes Rechteck an* LO *so entworfen, dass der Überschuss ein Quadrat ist, so erhält man den Punkt* K. *Und weil der Punkt* G *gegeben ist, wird die Linie* GK *der Lage nach gegeben seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m:n. *Mache* GL:FO = m:n *und entwirf an* LO *ein dem* □ ML.FO *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey. Es sey dieses das* □ LKO. *Da nun* □ ML.FO *weder kleiner als* □ LFO, *denn* ML > LF, *noch grösser als* □ LMO *ist, denn* FO < OM: *so ist klar, dass der Punkt* K *zwischen* F, M *fällt. Verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GKH *die Aufgabe löse oder dass* MH:FK = m:n *sey. Denn weil* □ ML.FO = □ LKO, *so ist* ML:LK = KO:OF *und* divid. MK:KL *das ist* MH:GL = KF:FO, *also* perm. MH:FK = GL:FO. *Es ist aber* GL:FO = m:n, *folglich ist* MH:FK = m:n *und die Linie* GH *löst die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie, wie* GP, *welche das Verhältniss* m:n *abschneide. Es ist daher* MP:FQ = MH:FK. *Diess ist aber nicht möglich, weil das Vorderglied kleiner ist als das Vorderglied, und das Hinterglied grösser als das Hinterglied; woraus hervorgeht, dass die Linie* GP *ein kleineres Verhältniss als* GH *abschneidet.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren.* *)

Cas. IV. Fig. 20. *Analysis. Es werde endlich nach der vierten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* MA, FD *das Verhältniss* MH:FK *gleich dem gegebenen abschneide. In demselben Verhältnisse nimm* GL:FO, *so wird wegen der bekannten* GL *die Linie* FO *der Grösse und Lage nach gegeben seyn; daher ist, weil der Punkt* F *gegeben wird, auch der Punkt* O *gegeben. Da nun* GL:FO = MH:FK, *so ist* perm. GL:MH *das ist* LK:KM = OF:FK *und* convert.

*) *Dieser Satz fehlt im Lat.*

KL : LM = FO : OK, *mithin* □ ML . FO = □ LKO. *Es ist aber* □ ML . FO *gegeben, weil beide Linien* ML, FO *gegeben sind; folglich ist auch* □ LKO *gegeben. Entwirft man also jenes Rechteck an* LO, *so dass die Ergänzung ein Quadrat ist: so erhält man den Punkt* K. *Und da der Punkt* G *gegeben wird, so ist also die Linie* GK *der Lage nach* *) *gegeben.*

Determination. Weil aber in der Composition GL : FO *in dem gegebenen Verhältnisse genommen und an* LO *ein dem* □ ML . FO *gleiches Rechteck, dessen Ergänzung ein Quadrat sey, nämlich das* □ LKO *entworfen und die Linie* GK *gezogen werden muss: so wird man den Punkt* K *nicht in allen Fällen erhalten können. Daher ist auch die Construction nicht immer und in allen Fällen möglich. Nur auf eine Weise aber wird sie geschehen, wenn die Linie* LO *in* K *halbirt wird. Wir haben also folgende Aufgabe.*

Um dieses äusserste Verhältniss zu erhalten sezzen wir dasselbe gleich GL : FO. *Wird nun* LO *in* K *halbirt, so muss* □ LKO = □ ML . FO *seyn. Es sey geschehen. Jenes Verhältniss sey* GL : FO *und es werde* LO *in* K *halbirt, so dass* □ LKO = □ ML . FO *ist. Weil also* □ LKO = □ ML . FO, *so ist* KL : LM = FO : OK *und* divid. FK : KO = KM : ML. *Es ist aber* OK = KL, *also* FK : KL = KM : ML, *mithin* perm. *und* divid. FM : MK = KM : ML. *Folglich ist* MK *die mittlere Proportionale zwischen* LM, MF. *Da nun beide Linien* LM, MF *gegeben sind, so ist auch* MK *der Grösse und Lage nach gegeben; und da der Punkt* M *gegeben ist, so ist es auch der Punkt* K. *Es ist aber der Punkt* L *bekannt, mithin die Linie* LK, *welcher* KO *gleich ist. Folglich ist auch* KO

---

*) *Unrichtig steht im Lat.* magnitudine et positione.

der Grösse und Lage nach gegeben. Nun ist aber der Punkt K *bekannt, folglich ist der Punkt* O, *das ist der gesuchte Punkt gegeben,*

Die Aufgabe wird daher so gelöst werden, Mit Beibehaltung der Figur und der Parallele nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und mache* OK = KL. *Ich behaupte, dass* O *der gesuchte Punkt, das ist, dass* □ LKO = □ ML, FO *sey. Denn weil* MK *die mittlere Proportionale zwischen* LM, MF *ist, so ist* FM; MK = KM; ML. *Nun hat die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder dasselbe Verhältniss; folglich ist* FK; KL = KM : ML *oder, weil* LK = KO *ist,* FK : KO = KM; ML *und* comp, FO : OK = KL : LM, *mithin* □ LKO = □ ML, FO. *Folglich ist* O *der gesuchte Punkt. Verbindet man nun* GK, *so behaupte ich, dass* MH : FK = GL : FO. *Denn es ist* FO; OK = KL : LM *und* convert. OF : FK = LK : KM *das ist* = GL : MH, *mithin verwechselt* GL : FO = MH; FK. *Man nehme also zur Construction* MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und verbinde* GK: *so ist klar, dass das Verhältniss* MH : FK, *welches* GK *abschneidet, entweder kleiner oder grösser ist als jedes andere Verhältniss, welches durch irgend eine Linie, die aus* G *nach* MA, FD *geht, abgeschnitten werden kann.*

Diess wird aber auf folgende Weise bestimmt. Mit Beibehaltung der Figur nebst der Parallele nimm die mittlere Proportionale zwischen LM, MF, *wie* MK, *und verbinde* GK: *so ist zuerst zu untersuchen, ob* GK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss* MH : FK *als jede andere Linie abschneide, die aus* G *nach* MA, FD *gezogen werden kann. Mache* OK = KL, *so ist* □ LKO = □ ML, FO *und daher* MH : FK = GL : FO. *Ziehe nun eine andere gerade Linie, wie* GQ, *und vergleiche das Verhältniss* MH : FK *mit* MP : FQ *oder, weil* MH; FK = GL : FO *ist,* GL; FO

mit MP : FQ *und verwechselt* GL : MP *mit* OF : FQ. *Nun ist* GL : MP = LQ : QM, *vergleiche also* LQ : QM *mit* OF : FQ *und* convert. QL : LM *mit* FO : OQ, *also* ▭ ML . FO *mit* ▭ LQO. *Es ist aber* ▭ ML . FO = ▭ LKO, *vergleiche daher* ▭ LKO *mit* ▭ LQO. *Nun ist klar, dass* ▭ LKO > ▭ LQO, *weil der Punkt* K *die Linie* LO *halbirt: daher ist* ▭ LQO < ▭ ML . FO, *also* QL : LM < FO : OQ *und* convert. LQ : QM *oder* GL : MP > OF : FQ *und* perm. GL : FQ *das ist* MH : FK > MP : FQ. *Die Linie* GK *schneidet also ein grösseres Verhältniss als* GQ *ab; woraus hervorgeht, dass* GK *ein grösseres Verhältniss abschneidet als jede andere Linie, die aus* G *nach* MA, FD *gezogen wird.*

Ich behaupte ausserdem, dass die der GK *näheren gerade Linien grössere Verhältnisse bestimmen als die von ihr entfernteren. Denn weil* MP : FQ *kleiner ist als* MH : FK *oder als* GL : FO, *so verhalte sich wie* MP *zu* FQ, *so* GL *zu einer andern Linie, welche grösser als* FO *seyn wird. Sie sey* FZ: *so wird nach dem schon Bewiesenen* ▭ ML . FZ = ▭ LQZ *seyn. Ziehe nun eine andere gerade Linie wie* GS, *so ist das Verhältniss* MP : FQ *zu vergleichen mit* MR *zu* FS. *Es ist aber* MP : FQ *wie* GL : FZ. *Vergleiche also* GL : FZ *mit* MR : FS *und* perm. GL : MR *oder* LS : SM *mit* ZF : FS, *also* convert. SL : LM *mit* FZ : ZS *und* ▭ ML . FZ *mit* ▭ LSZ. *Nun ist* ▭ ML . FZ = ▭ LQZ; *vergleiche also* ▭ LQZ *mit* ▭ LSZ. *Auch werde* ▭ LKZ *verglichen mit* ▭ LQZ *oder, weil* ▭ LQZ = ▭ ML . FZ *ist,* ▭ LKZ *mit* ▭ ML . FZ. *Nun ist aus dem Vorigen bekannt, dass* ▭ LKO = ▭ ML . FO *ist. Zieht man also*

▭ LKO *von* ▭ LKZ
und ▭ ML . FO *von* ▭ ML . FZ

ab, so sind die Reste mit einander zu vergleichen, oder ▭ LK . OZ *mit* ▭ ML . OZ. *Es ist aber offen-*

bar $\square LK \cdot OZ > \square ML \cdot OZ$, *weil* $LK > ML$ *ist. Weil also* $\square ML \cdot OZ$ *kleiner als* $\square LK \cdot OZ$, *und* $\square ML \cdot FO$ *gleich ist dem Rechtecke* $LK \cdot KO$; *so ist das ganze Rechteck* $ML \cdot FZ$ *kleiner als das ganze Rechteck* LKZ. *Aber* $\square ML \cdot FZ = \square LQZ$, *folglich ist* $\square LQZ < \square LKZ$. *Hieraus folgt aber, dass* $\square LSZ < \square LQZ$ *ist. Weil nun* $\square LQZ = \square ML \cdot FZ$, *so ist* $\square LSZ < \square ML \cdot FZ$, *und* $SL : LM < FZ : ZS$, *mithin ist* convert. $LS : SM$ *oder* $GL : MR > ZF : FS$ *und* perm. $GL : FZ > MR : FS$. *Es ist aber* $GL : FZ = MP : FQ$, *also* $MP : FQ > MR : FS$. *Die Linie* GQ *also, welche weniger von der* GK *absteht, schneidet ein grösseres Verhältniss ab als die entferntere* GS. *Somit ist klar, dass die der* GK *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.*

Synthesis. Es bleibe die frühere Construction nebst der Parallele. Nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und verbinde* GK, *welche das Verhältniss* $MH : FK$ *abschneidet. Wenn nun* GK *der Aufgabe genügt, so ist klar, dass sie allein dieses leiste. Ist das gegebene Verhältniss grösser als* $MH : FK$, **) so ist die Aufgabe unmöglich, weil* GK *ein grösseres Verhältniss* $MH : FK$ *abschneidet als jede andere aus* G *nach* MA, FD *gehende Linie. Wenn aber ein Verhältniss* $m : n < MH : FK$ *gegeben wird, so mache* $OK = KL$; *alsdann ist* $\square ML \cdot FO = \square LKO$ *und* $MH : FK = GL : FO$. *Ferner nimm* $GL : FZ = m : n$, *so wird* $FZ > FO$ *seyn; und da*

$$\square LK \cdot OZ > \square ML \cdot OZ$$
$$\text{und } \square LKO = \square ML \cdot FO,$$

---

*) *Im Lat. steht bloss:* quod si major fuerit ratione MH ad FK. *Diese Stelle ist wahrscheinlich verdorben und nach Anleitung der Synthesis in* Cas. II. *herzustellen.*

so ist das ganze □ LKZ *grösser als das ganze* □ ML . FZ. *Daher kann das* □ ML . FZ *an* LZ *so entworfen werden, dass die Ergänzung ein Quadrat sey; und zwar auf zweierlei Weise, nämlich zu beiden Seiten des Punktes* K. *Wenn man nun durch die erhaltenen Punkte* Q *und* q *die geraden Linien* GQ, Gq *zieht: so behaupte ich, dass beide Linien* GQ, Gq *der Aufgabe genügen oder dass* MP : FQ = m : n *und* Mp : Fq = m : n *sey. Denn weil* □ LQZ = □ ML . FZ, *so ist* QL : LM = FZ : ZQ *und* convert. LQ : QM *das ist* GL : MP = ZF : FQ, *also* perm. GL : FZ *wie* MP : FQ. *Es ist aber* GL : FZ = m : n, *folglich ist* MP : FQ = m : n. *Und durch dieselben Schlüsse wird gezeigt, dass* Mp : Fq = m : n *sey. Folglich löst jede der Linien* GQ, Gq *die Aufgabe. Auch ist klar, dass die zu beiden Seiten der* GK *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.*

Das Gränzverhältniss aber wird so bestimmt. Es ist MH : FK = GL : FO. *Nun ist* FO *gleich* FK, KO *zusammengenommen, das ist gleich* LK, KF *(weil* LK = KO *ist); die Linien* LK, KF *aber zusammengenommen sind gleich* LM, MF, 2 MK *zusammen, und das Quadrat von* 2 MK *ist gleich dem vierfachen* □ LMF. *Folglich ist* MH : FK *gleich dem Verhältnisse der* GL *zu der Linie, welche besteht aus* LM, MF *und derjenigen, deren Quadrat gleich* 4 □ LMF *ist.*

Wir haben also gefunden, wie das Problem nach allen seinen Arten construirt werden könne; und es ist klar, dass in keinem Falle *) *die Auflösung nach allen Arten zugleich möglich ist. Denn man ziehe* (Fig. 21) GL ∓ AB, *suche die mittlere Proportionale zwischen* LM, MF, *mache die Linien* MK *und* Mk *der-*

*) In nullo casu *d. h. niemals, das gegebene Verhältniss mag beschaffen seyn wie es wolle; vergl. die erste Note zur Determ. in Fall* 5.

selben gleich, verbinde GK, Gk *und mache* OK = KL *und* ok = kL: *so ist nach der zweiten Art das kleinste Verhältniss* Mh : Fk *oder* GL : Fo, *und nach der vierten das grösste* MH : FK *oder* GL : FO. *Weil aber nach der zweiten Art das kleinste Verhältniss* GL : Fo, *und nach der vierten das grösste Verhältniss* GL : FO *ist, so ist offenbar das Verhältniss* GL : Fo *grösser als das Verhältniss* GL : FO. *Das gegebene Verhältniss wird also entweder gleich* GL : Fo, *oder kleiner als* GL : Fo *und grösser als* GL : FO, *oder grösser als* GL : Fo, *oder gleich* GL : FO, *oder kleiner als* GL : FO *seyn.* — *Ist es gleich* GL : Fo, *so kann auf dreierlei Weise construirt werden, nämlich nach der ersten und dritten Art, nach welchen beliebige Verhältnisse abgeschnitten werden können, und auf eine Weise nach der zweiten Art; nicht aber nach der vierten, weil das Verhältniss* GL : Fo *grösser ist als* GL : FO. — *Wenn das Verhältniss kleiner ist als* GL : Fo *und grösser als* GL : FO, *so ist das Problem nur nach zwei Arten möglich, nämlich nach der ersten und dritten; nicht aber kann es nach der zweiten und vierten gelöst werden, weil das gegebene Verhältniss kleiner ist als das kleinste und grösser als das grösste.* — *Ist es grösser als* GL : Fo, *so wird die Aufgabe auf viererlei Weise gelöst werden, nämlich nach der ersten und dritten Art, und doppelt nach der zweiten; nicht aber nach der vierten, weil das Verhältniss grösser ist als das grösste* *). — *Wenn es aber das grösste, das ist gleich* GL : FO *ist, so wird dreifach construirt werden, nämlich nach der ersten und dritten Art und einfach nach der vierten; nicht aber nach der zweiten, weil es kleiner ist als das*

*) *Hier folgt noch das Glossem:* sive quam ratio *GL* ad *FO*; est enim *GL* ad *Fo* major ratione *GL* ad *FO*.

kleinste *). — *Ist endlich das gegebene Verhältniss kleiner als* GL : FO, *so kann die Aufgabe auf viererlei Weise gelöst werden, nach der ersten und dritten Art, und doppelt nach der vierten; nicht aber nach der zweiten, weil das gegebene Verhältniss kleiner ist als das kleinste.*

Wir haben also nachgewiesen, ob die Construction möglich sey oder nicht, bei allen Verschiedenheiten des gegebenen Verhältnisses.

Fall 7.

Es bleibe nun der gegebene Punkt *G*, wo er früher war, die Parallele aber schneide die *CD* diesseit des Punktes *F*, das ist sie falle zwischen die Punkte *M* und *F*, wie die Linie *GL*. Die durch den Punkt *G* gehenden Linien aber können auf vier verschiedene Arten gezogen werden; entweder nämlich wird das Verhältniss in *MA*, *FC* genommen werden; oder in *MA*, *FM*; oder in *MB*, *FM*; oder endlich in *MA*, *FD*.

Cas. I. Fig. 22. *Analysis. Es werde aber zuerst nach der ersten Art die Linie* HGK *gezogen, welche von* MA, FC *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK. *Weil* GL *gegeben ist, so wird auch* FO *der Grösse und Lage nach gegeben, und wegen des gegebenen Punktes* F *auch der Punkt* O **). *Weil nun* MH : FK = GL : FO, *so ist verwechselt* MH : GL, *das ist* MK : KL = KF : FO *und divid.* ML : LK = KO : OF, *mithin* □ ML . FO = □ LKO. *Es wird aber* □ ML . FO *gegeben wegen seiner bekannten Seiten, folglich auch*

*) *Eben so folgt hier das Glossem:* ratio enim *GL* ad *FO* minor est ratione *GL* ad *FO*.

**) *Ergänze: Weil also die Punkte* L, O *gegeben sind, so ist die Linie* LO *der Lage und Grösse nach gegeben.*

□ LKO. *Entwirft man also dieses Rechteck an der gegebenen* LO, *so dass der Überschuss ein Quadrat ist: so erhält man den Punkt* K; *und da der Punkt* G *gegeben ist, so ist auch die Linie* HGK *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m:n. *Wie sich nun* m *zu* n *verhält, so verhalte sich* GL *zu* FO; *entwirf an* LO *ein dem* □ ML . FO *gleiches Rechteck, das ein Quadrat zum Überschuss hat, es sey* □ LKO; *verbinde* GK *und verlängere sie: ich behaupte, dass die Linie* HK *der Aufgabe genüge oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn weil* □ ML . FO = □ LKO, *so ist* ML : LK = KO : OF *und* comp. MK : KL, *das ist* MH : GL = KF : FO, *also* perm. MH : FK = GL : FO *das ist* = m : n *(nach der Construction); mithin löst die Linie* HK *die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wenn eine andere Auflösung möglich ist, so ziehe eine andere Linie, wie* PGQ, *so dass* MP : FQ = MH : FK *sey. Dies ist aber nicht möglich, weil das Vorderglied grösser ist als das Vorderglied, und das Hinterglied kleiner als das Hinterglied, und also* HK *ein kleineres Verhältniss als* PQ *abschneidet.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren* *).

Cas. II. Fig. 23. *Analysis. Es werde nach der zweiten Art die Linie* HK *gezogen, welche von* MA, FM *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK. *Weil also* MH : FK = GL : FO, *so ist* perm. MH : GL, *das ist* MK : KL = KF : FO. *Nun ist* MK > KL, *also* KF > FO **). *Es ist aber* FO *der Grösse und Lage*

*) *Dieser Satz fehlt im Lat.*
**) *Ich halte diesen Schluss für ein Glossem.*

nach gegeben, folglich ist wegen des gegebenen Punktes F *auch der Punkt* O *gegeben. Da nun* MK : KL = KF : FO, *so ist* divid. ML : LK = KO : OF *und* □ ML . FO = □ LKO. *Es sind aber die Linien* ML, FO *gegeben, also auch* □ LKO, *welches an der bekannten* LO *so zu entwerfen ist, dass die Ergänzung ein Quadrat sey. Folglich ist der Punkt* K *bekannt, mithin auch wegen des gegebenen Punktes* G *die Linie* GK *der Lage nach.*

Determination. Weil aber zur Construction erfordert wird, dass GL : FO *gleich dem gegebenen Verhältnisse gemacht und an* LO *ein dem* □ ML : FO *gleiches Rechteck entworfen werde, dessen Ergänzung ein Quadrat sey, nämlich* □ LKO, *so dass man hierdurch den Punkt* K *in* LO *erhält: so wird diess nicht unter allen Umständen geschehen können. Daher wird auch die Auflösung des Problems nicht immer und in allen Fällen möglich seyn.*

Nur auf eine Weise aber wird sie geschehen, wenn der Punkt K *die Mitte der* LO *ist. Der Punkt* K *aber, welcher das äusserste Verhältniss angiebt, wird folgendermassen erforscht werden.*

Setzen wir, jenes äusserste Verhältniss sey GL : FO, *und halbiren* LO *in* K: *so muss* □ LKO = □ ML : FO *seyn. Es bleibt uns also nur ein solcher Punkt* O *in* LF *zu suchen, dass, wenn* LO *in* K *halbirt wird,* □ LKO = □ ML . FO *ist. Wenn nun also* □ ML : FO = □ LKO; *so ist* FO : OK = KL : LM *und* comp: FK : KO *oder* KL = KM : ML. *Die Summe der Vorderglieder hat aber zur Summe der Hinterglieder dasselbe Verhältniss, mithin ist* FM : MK = KM : ML; *Daher ist* MK *die mittlere Proportionale zwischen den gegebenen* LM, MF; *es ist also* MK *der Grösse und Lage nach gegeben und, weil der Punkt* M *gegeben ist, auch der Punkt* K. *Wegen des bekannten Punktes* L *ist daher die Linie* LK *gegeben, welcher*

□ LKO. *Entwirft man also dieses Rechteck an der gegebenen* LO, *so dass der Überschuss ein Quadrat ist: so erhält man den Punkt* K; *und da der Punkt* G *gegeben ist, so ist auch die Linie* HGK *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m:n. *Wie sich nun* m *zu* n *verhält, so verhalte sich* GL *zu* FO; *entwirf an* LO *ein dem* □ ML . FO *gleiches Rechteck, das ein Quadrat zum Überschuss hat, es sey* □ LKO; *verbinde* GK *und verlängere sie: ich behaupte, dass die Linie* HK *der Aufgabe genüge oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn weil* □ ML . FO = □ LKO, *so ist* ML : LK = KO : OF *und* comp. MK : KL, *das ist* MH : GL = KF : FO, *also* perm. MH : FK = GL : FO *das ist* = m : n *(nach der Construction); mithin löst die Linie* HK *die Aufgabe. Ich behaupte auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wenn eine andere Auflösung möglich ist, so ziehe eine andere Linie, wie* PGQ, *so dass* MP : FQ = MH : FK *sey. Diess ist aber nicht möglich, weil das Vorderglied grösser ist als das Vorderglied, und das Hinterglied kleiner als das Hinterglied, und also* HK *ein kleineres Verhältniss als* PQ *abschneidet.*

Die dem Punkte M *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren* *).

Cas. II. Fig. 23. *Analysis. Es werde nach der zweiten Art die Linie* HK *gezogen, welche von* MA, FM *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK. *Weil also* MH : FK = GL : FO, *so ist* perm. MH : GL, *das ist* MK : KL = KF : FO. *Nun ist* MK > KL, *also* KF > FO **). *Es ist aber* FO *der Grösse und Lage*

*) *Dieser Satz fehlt im Lat.*
**) *Ich halte diesen Schluss für ein Glossem.*

ch gegeben, folglich ist wegen des gegebenen Punk-
: F auch der Punkt O gegeben. Da nun MK : KL =
? : FO, so ist divid. ML : LK = KO : OF *und* □ ML . FO
□ LKO. *Es sind aber die Linien* ML, FO *gege-*
n, also auch □ LKO, *welches an der bekannten*
) so zu entwerfen ist, dass die Ergänzung ein Qua-
at sey. Folglich ist der Punkt K *bekannt, mithin*
ch wegen des gegebenen Punktes G *die Linie* GK
r Lage nach.

Determination. Weil aber zur Construction
fordert wird, dass GL : FO *gleich dem gegebenen*
rhältnisse gemacht und an LO *ein dem* □ ML : FO
eiches Rechteck entworfen werde, dessen Ergänzung
Quadrat sey, nämlich □ LKO, *so dass man hier-*
rch den Punkt K *in* LO *erhält: so wird diess nicht*
ter allen Umständen geschehen können. Daher
rd auch die Auflösung des Problems nicht immer
ud in allen Fällen möglich seyn.

Nur auf eine Weise aber wird sie geschehen,
enn der Punkt K *die Mitte der* LO *ist. Der Punkt*
aber, welcher das äusserste Verhältniss angiebt,
rd folgendermassen erforscht werden.

Setzen wir, jenes äusserste Verhältniss sey GL : FO,
id halbiren LO *in* K: *so muss* □ LKO = □ ML . FO
yn. Es bleibt uns also nur ein solcher Punkt O
LF *zu suchen, dass, wenn* LO *in* K *halbirt wird,*
LKO = □ ML . FO *ist. Wenn nun also* □ ML . FO
□ LKO; *so ist* FO : OK = KL : LM *und* comp:
K : KO *oder* KL = KM : ML. *Die Summe der Vor-*
yglieder hat aber zur Summe der Hinterglieder das-
lbe Verhältniss, mithin ist FM : MK = KM : ML;
daher ist MK *die mittlere Proportionale zwischen*
n gegebenen LM, MF; *es ist also* MK *der Grösse*
id Lage nach gegeben und, weil der Punkt M *ge-*
ben ist, auch der Punkt K. *Wegen des bekannten*
unktes L *ist daher die Linie* LK *gegeben, welcher*

ist als das Rechteck LKZ; *folglich ist das Rechteck* LKZ *grösser als das Rechteck* ML . FO *und um so mehr grösser als das Rechteck* ML . FZ. *Da nun* □ML . FZ = □LQZ, *so ist* □LKZ > □LQZ. *Hieraus aber folgt, dass* □LQZ > □LSZ, *also auch* □ML . FZ > □LSZ *ist. Daher ist* ML : LS > SZ : ZF *und* comp. MS : SL, *oder* MR : GL > SF : FZ, *also* perm. MR : FS > GL : FZ, *oder* > MP : FQ. *Die Linie* PQ *bestimmt also ein kleineres Verhältniss als* RS. *Folglich schneiden die der* HK *näheren geraden Linien immer kleinere Verhältnisse ab als die von ihr entfernteren.*

Synthesis. Nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und verbinde* KGH: *so schneidet diese Linie* HK *ein kleineres Verhältniss* MH : FK *ab als jede andere aus* G *nach* MA, FM *gehende gerade Linie. Das gegebene Verhältniss ist aber entweder gleich* MH : FK, *oder kleiner, oder grösser. Ist es gleich demselben, so genügt* HK *der Aufgabe und offenbar allein, weil alle durch den Punkt* G *gezogenen Linien grössere Verhältnisse als* HK *bestimmen. Ist es kleiner, so ist die Aufgabe unmöglich; weil ein Verhältniss kleiner als das kleinste abgeschnitten werden soll. Wenn aber das Verhältniss grösser als* MH : FK *ist, wie* m : n, *so mache* OK = KL; *dann wird* □ML . FO = □LKO *und* MH : FK = GL : FO *seyn. Da nun* m : n *grösser ist als* MH : FK *oder als* GL : FO, *so sey* GL : FZ = m : n; *so ist* FZ < FO. *Nun ist* □ML . FO = □LKO, *folglich ist* □ML . FZ < □LKZ. *Daher wird sich an* LZ *ein dem* □ML . FZ *gleiches Rechteck entwerfen lassen, dessen Ergänzung ein Quadrat ist; und zwar auf zweierlei Weise, nämlich zu beiden Seiten des Punktes* K. *Hierdurch erhält man die gesuchten Punkte* Q, q. *Verbinde also* GQ, Gq *und verlängere sie: so behaupte ich, dass jede der Linien* GQ, Gq *der Aufgabe genüge oder dass die Verhält-*

nisse MP : FQ *und* Mp : Fq *gleich* m : n *seyen. Denn weil* □ ML . FZ = □ LQZ, *so ist* ML : LQ = QZ : ZF, *also* comp. (MQ : QL, *das ist* MP : GL = QF : FZ) *) *und dann* perm. MP : FQ = GL : FZ *das ist* = m : n. *Folglich löst* PQ *die Aufgabe. Eben so aber wird gezeigt, dass die Linie* pq *dasselbe leiste. Folglich lösen beide Linien die Aufgabe; und es ist klar, dass die der* HK *zu beiden Seiten näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.*

Das Gränzverhältniss aber wird so bestimmt. Es ist MH : FK = GL : FO. *Nun ist* FO *der Überschuss der Linien* LM, MF *über* LM, MO *zusammengenommen;* LM, MO *zusammen aber sind gleich der doppelten* MK, *weil* OK = KL *ist; und das Quadrat der doppelten* MK *ist gleich dem vierfachen* □ LMF, *denn* MK *ist die mittlere Proportionale zwischen* LM, MF. *Folglich ist das kleinste Verhältniss gleich dem Verhältnisse der* GL *zu dem Überschusse, um welchen* LM, MF *zusammengenommen diejenige Linie übertreffen, deren Quadrat gleich* 4 □ LMF *ist.*

Cas. III. Fig. 24. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* HK *gezogen, welche von* MB, FM *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK. *Weil* GL *gegeben ist, so ist die Linie* FO *sowohl der Grösse als der Lage nach gegeben. Wegen des gegebenen Punktes* F *ist daher der Punkt* O *und somit die Linie* LO *gegeben. Weil nun* MH : FK = GL : FO, *so ist* perm. MH : GL, *das ist* MK : KL = KF : FO, *also* comp. ML : LK = KO : OF *und* □ ML . FO = □ LKO. *Es ist aber* □ ML . FO *gegeben, weil beide Seiten bekannt sind; also auch* □ LKO. *Entwirft man also dieses Rechteck an* LO *so, dass der Überschuss ein*

*) *Die eingeklammerte Proportion fehlt im Lat.*

Quadrat ist, so erhält man den Punkt K. *Und da auch der Punkt* G *gegeben wird, so ist die Linie* HK *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* GL : FO = m : n *und entwirf an* LO *ein dem* □ ML . FO *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey, nämlich das* □ LKO. *Verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* HK *die Aufgabe löse, oder dass* MH : FK = m : n *sey. Denn weil* □ ML . FO = □ LKO, *so ist* ML : LK = KO : OF, *also* divid. MK : KL, *das ist* MH : GL = KF : FO *und* perm. MH : FK = GL : FO *oder* = m : n. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe, ich behaupte aber auch, dass sie allein dieses leiste. Denn wo möglich ziehe eine andere Linie wie* GP. *Schneidet nun die Linie* GP *dasselbe Verhältniss* m : n *ab, so ist* MH : FK = MP : FQ. *Diess ist aber nicht möglich, weil das Vorderglied kleiner ist als das Vorderglied, und das Hinterglied grösser als das Hinterglied; woraus hervorgeht, dass* GP *ein kleineres Verhältniss als* GH *abschneide.*

Es ist also klar, dass die dem Punkte M *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren* *).

Cas. IV. Fig. 25. *Analysis. Es werde endlich nach der vierten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* MA, FD *das Verhältniss* MH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Mache* GL : FO = MH : FK, *so ist, weil* GL *bekannt ist, die Linie* FO *der Grösse und Lage nach gegeben. Wegen des Punktes* F *ist also der Punkt* O *und somit, weil auch der Punkt* L *bekannt ist, die Linie* LO *gegeben. Weil nun* GL : FO = MH : FK, *so ist* perm. GL : MH, *das ist* LK : KM = OF : FK *und* convert. KL : LM = FO : OK,

*) *Dieser Satz fehlt im Lat.*

mithin □ ML . FO = □ LKO. *Es ist aber* □ ML . FO *gegeben, also auch* □ LKO. *Entwirft man also dasselbe an der Linie* LO, *so dass die Ergänzung ein Quadrat ist, so erhält man den Punkt* K; *und da der Punkt* G *gegeben wird, so ist die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber zur Construction erfordert wird, dass GL : FO *in dem gegebenen Verhältnisse genommen und an* LO *ein dem* □ ML . FO *gleiches Rechteck, nämlich* □ LKO, *so entworfen werde, dass die Ergänzung ein Quadrat sey: so kann, aus früher angeführten Gründen, diese Entwerfung nicht immer geschehen, wenn nicht das Verhältniss innerhalb bestimmter Gränzen ist; und es ist daher die Auflösung des Problems nicht immer möglich.*

Nur auf eine Weise aber wird sie geschehen, wenn der Punkt K *die Mitte der* LO *ist. Die Analysis* *) *ist folgende. Um das Gränzverhältniss zu bestimmen, setzen wir es gleich* GL : FO *und halbiren* LO *in* K, *so dass dann* □ ML . FO = □ LKO *ist. Es muss daher in* FD *ein solcher Punkt* O *gefunden werden, dass nach Halbirung der* LO *in* K *das* □ ML . FO *gleich* □ LKO *ist. Es sey also* □ ML . FO = □ LKO, *so ist* FO : OK = KL : LM *und* divid. FK : KO = KM : ML. *Da nun* LK = KO, *so ist auch* FK : KL = KM : ML. *Nun hat aber die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder dasselbe Verhältniss, folglich ist* FM : MK = KM : ML. *Daher ist* MK *die mittlere Proportionale zwischen* LM, MF. *Weil nun beide Linien* LM, MF *gegeben sind, so ist* MK *der Grösse und Lage nach gegeben. Wegen des gegebenen Punktes* L *ist also die* LK *bekannt, welcher* KO *gleich ist; mithin ist auch* KO *der Grösse und Lage nach*

---

*) *Diess ist die einzige Stelle, wo im Lat. das Wort* Analysis *gebraucht ist.*

gegeben. Es ist aber der Punkt K *bekannt, folglich auch der Punkt* Q, *welcher der gesuchte Punkt ist.*

Die Aufgabe wird also auf folgende Weise gelöst werden. Nimm MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF, *mache* OK = KL *und verbinde* GK. *Ich behaupte, dass* □ ML . FO = □ LKO *und* MH : FK = GL : FO *sey. Denn weil* FM : MK = KM : ML *und die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder dasselbe Verhältniss hat, so ist* FK : KL = KM : ML. *Nun ist* LK = KO, *mithin* FK : KO = KM : ML *und* comp. FO : OK = KL : LM. *Daher ist* □ ML . FO = □ LKO. *Ferner weil* FO : OK = KL : LM, *so ist* convert. OF : FK *wie* LK : KM, *oder wie* GL : MH, *mithin* perm. GL : FO = MH : FK. *Es wird also richtig construirt, wenn* MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *genommen und* GHK *verbunden wird.*

Jetzt ist zu untersuchen, ob die Linie GK *ein kleineres oder grösseres Verhältniss* MH : FK *als jede andere aus* G *nach* MA, FD *mögliche Linie abschneide. Diess wird auf folgende Weise bestimmt. Nimm* MK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LM, MF *und verbinde* GK: *so ist zu untersuchen, ob die Linie* GK *ein grösseres oder kleineres Verhältniss* MH : FK *als jede andere Linie abschneide, die aus* G *nach* MA, FD *gezogen werden kann. Mache* OK = KL, *so ist* □ ML . FO = □ LKO *und* MH : FK = GL : FO. *Ziehe nun eine andere Linie, wie* GQ, *und vergleiche das Verhältniss* MH : FK, *oder* GL *zu* FO *mit* MP : FQ *und* perm. *das Verhältniss* GL *zu* MP, *oder* LQ : QM *mit* OF : FQ, *also* convert. QL : LM *mit* FO : OQ, *mithin* □ ML . FO *mit* □ LQO. *Es ist aber* □ LKO = □ ML . FO, *vergleiche also* □ LKO *mit* □ LQO. *Nun ist aber klar, dass* □ LKO > □ LQO *sey. Daher wird, weil* □ LKO = □ ML . FO *ist, auch* □ ML . FO > □ LQO *seyn. Folglich ist* QL : LM

FO : OQ *und* convert. LQ : QM, *oder* GL : MP > F : FQ, *mithin* perm. GL : FO > MP : FQ. *Die Li-* e GK *schneidet also ein grösseres Verhältniss als* Q *ab. Hieraus geht aber hervor, dass unter allen* us G *nach* MA; FD *möglichen geraden Linien* GK *ie grösste Verhältniss* MH : FK *abschneide.*

Ich behaupte ausserdem, dass die der GK *näher n geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden s die von ihr entfernteren. Denn weil* MH : FK, *ler* GL : FO > MP : FQ *ist, so sey* GL : FZ = MP : FQ, *wird* FZ > FO *seyn und aus dem Vorigen folgt, ass* □ ML . FZ = □ LQZ *ist. Ziehe nun eine an- re gerade Linie, wie* GS, *und vergleiche* MP : FQ, *ler* GL : FZ *mit* MR : FS, *also* perm. GL : MR, *oder* S : SM *mit* ZF : FS *und* convert. SL : LM *mit* FZ : ZS, *ithin* □ ML . FZ *mit* □ LSZ. *Auch werde* □ LKZ *rglichen mit* □ LQZ. *Nun ist* □ LQZ = □ ML . FZ, *aber werde das Rechteck* LKZ *mit dem echtecke* ML . FZ *verglichen. Es ist aber lar, dass* □ LKZ > □ ML . FZ *ist. Denn weil*

□ LK . OZ > □ ML . OZ

und □ LK . KO = □ ML . FO

t, so wird das ganze □ LKZ *grösser seyn als das anze* □ ML . FZ *oder als* □ LQZ. *Hieraus aber olgt, dass auch* □ LQZ > □ LSZ; *also* □ ML . FZ > □ LSZ *ist. Folglich ist* SL : LM < FZ : ZS *und* convert. S : SM, *oder* GL : MR > ZF : FS, *also* perm. GL : FZ, *der* MP : FQ > MR : FS; *mithin schneidet* GQ *ein rösseres Verhältniss als* GS *ab. Die der* GK *näheren geraden Linien schneiden also grössere Verhältisse ab als die von ihr entfernteren.*

Synthesis. Nimm MK *gleich der mittlern Proortionale zwischen* LM, MF *und verbinde* GK. *Diese inie* GK *schneidet das Verhältniss* MH : FK *ab, welhes grösser ist als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* MA; FD. *Das zur Construction*

gegebene Verhältniss aber wird entweder das Verhältniss MH : FK, *oder grösser, oder kleiner als dasselbe seyn. Ist es gleich dem Verhältnisse* MH : FK, *dann genügt die Linie* GHK *der Aufgabe. Ist das Verhältniss grösser als* MH : FK, *so ist die Auflösung nicht möglich; weil das gegebene Verhältniss grösser ist als das grösste. Wenn aber das gegebene Verhältniss* m : n *kleiner ist als* MH : FK, *so mache* OK = KL; *alsdann ist* □ ML . FO = □ LKO *und* MH : FK = GL : FO. *Mache* GL : FZ = m : n, *so wird* FZ > FO *seyn; und weil*

□ LK . OZ > □ ML . OZ

und □ LK . KO = □ ML . FO,

so ist das ganze □ LKZ *grösser als das ganze* □ ML . FZ. *Folglich lässt sich an* LZ *ein dem* □ ML . FZ *gleiches Rechteck entwerfen, dessen Ergänzung ein Quadrat ist, und zwar auf zweierlei Weise, nämlich zu beiden Seiten des Punktes* K. *Dadurch erhält man die gesuchten Punkte* Q, q. *Verbinde nun* GQ, Gq; *ich behaupte, dass jede der Linien* GQ, Gq *der Aufgabe genüge, oder dass* MP : FQ = m : n, *so wie* Mp : Fq = m : n *sey. Denn weil* □ ML . FZ = □ LQZ, *so ist* FZ : ZQ = QL : LM *und* convert. ZF : FQ = LQ : QM *oder* = GL : MP. *Daher ist* perm. GL : FZ = MP : FQ. *Nun ist* GL : FZ = m : n, *folglich ist* MP : FQ = m : n. *Auf dieselbe Art aber wird bewiesen, dass* Mp : Fq = m : n *sey. Folglich genügen beide Linien* GQ, Gq *der Aufgabe. Auch ist klar, dass die der* GK *zu beiden Seiten näheren geraden Linien grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren.*

Das grösste Verhältniss aber wird auf folgende Weise bestimmt. Das grösste Verhältniss ist gleich MH : FK *oder* GL : FO. *Die Linie* FO *aber besteht aus den beiden Linien* FK, KL *zusammengenommen (weil* OK = KL *ist); ferner* FK, KL *aber sind gleich den Linien* LM, MF *nebst dem Doppelten der* MK *zu-*

mmengenommen, und das Quadrat der doppelten K *ist gleich dem vierfachen* □ LMF. *Folglich ist as Verhältniss* GL : FO *gleich dem Verhältnisse der* L *zu der Linie, welche besteht aus* LM, MF *und rjenigen, deren Quadrat gleich* 4 □ LMF *ist.* *)

Wir haben also die Composition des Problems i jeder möglichen Beschaffenheit des gegebenen Verältnisses gelehrt und gezeigt, ob die Construction öglich sey oder nicht. Nimm (Fig. 26) *die mittlere roportionale zwischen* LM, MF *und trage sie auf* D *zu beiden Seiten des Punktes* M, *wie* Mk, MK; *ehe die Linien* Gk, GK *und mache* ok = kL, *so ie* OK = KL. *Alsdann ist* Mh : Fk *oder* GL : Fo *das leinste Verhältniss nach der zweiten Art, und* MH : FK *der* GL *zu* FO *das grösste nach der vierten. Es t aber klar, dass* **) GL : Fo > GL : FO *ist. Das gebene Verhältniss ist nun entweder das Verhältniss* L : Fo, *oder kleiner als* GL : Fo *und grösser als* L : FO; *oder grösser als* GL : Fo, *oder gleich* L : FO, *oder kleiner als das letztere. — Ist nun as Verhältniss gleich* GL : Fo, *so wird das Problem uf dreierlei Weise gelöst werden, nämlich nach er ersten und dritten Art, und einfach nach der weiten; nicht aber nach der vierten, weil das Verältniss* GL : Fo *grösser ist als das Verhältniss* L : FO. — *Ist es aber kleiner als* GL : Fo *nd grösser als* GL : FO, *dann wird zwieach construirt werden, nämlich nach der rsten und dritten Art; nicht aber nach er zweiten, weil das Verhältniss kleiner ls das kleinste; auch nicht nach der vieren, weil es grösser ist als das grösste. — Wenn das Verhältniss grösser ist als* GL : Fo, *dann*

*) *Im Lat. folgt hier noch:* vel minor erit ea.
**) *Hier folgt noch im Lat.:* juxta modum secundum

kann vierfach construirt werden, nämlich nach der ersten und dritten Art, und doppelt nach der zweiten; nicht aber nach der vierten, weil das gegebene Verhältniss, da es grösser als GL : Fo *ist, noch viel grösser ist als* GL : FO. — *Wenn es aber gleich ist dem Verhältnisse* GL : FO, *so wird die Aufgabe auf dreierlei Weise gelöst, nämlich nach der ersten und dritten Art, und einfach nach der vierten; nicht aber nach der zweiten, weil das Verhältniss* GL : FO *kleiner ist als das kleinste oder als* GL : Fo. — *Endlich wenn es kleiner als* GL : FO *ist, so kann das Problem vierfach gelöst werden, nämlich nach der ersten und dritten Art und doppelt nach der vierten; nicht aber nach der zweiten, weil das gegebene Verhältniss kleiner ist als das kleinste. Wir haben also das Problem nach allen seinen Verschiedenheiten aufgelöst.*

Des

APOLLONIUS VON PERGA

vom

Verhältnisschnitt

Zweites Buch.

Es seyen zwei gerade Linien der Lage nach gegeben, wie *AB*, *CD*, welche sich in *M* schneiden; in *AB* werde der Punkt *E* und in *CD* der Punkt *F* genommen; und der gegebene Punkt *G* sey zuerst im Winkel *CMB*. Die durch *G* gehenden geraden Linien, welche Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneiden, lassen sich auf fünf Arten ziehen, entweder nämlich nach *EB*, *FD*; oder nach *EB*, *FM*; oder nach *EA*, *FC*; oder nach *EM*, *FC*; oder endlich nach *EB*, *FC*.

Cas. I. Fig. 27. *Analysis. Es werde nun nach der ersten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* EB, FD *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE. *Weil die Punkte* G, E *gegeben sind, so ist die Linie* GE *der Lage nach gegeben; es ist aber auch* CD *der Lage nach gegeben, folglich ist der Durchschnittspunkt* N *gegeben. Durch den Punkt* N *ziehe der* AB *eine Parallele* TU. *Weil nun diese Linie durch den gegebenen Punkt* N *geht und der gegebenen* AB *parallel ist: so ist die Linie* TU *selbst der Lage nach gegeben. Es sind also die Linien* EG, GN *wegen der bekannten Punkte* E, N, G *gegeben, mithin das Verhältniss* EG : GN, *das ist* EH : NP. *Nun wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben; folglich ist das Verhältniss* NP : FK *bekannt. Es werden also zwei gerade Linien* TU, CD *der Lage nach gegeben, in* TU *wird der Punkt*

N, *in* CD *der Punkt* F *genommen, und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU. *Es ist daher eine gerade Linie wie* GK *zu ziehen, welche von jenen Linien das gegebene Verhältniss* NP : FK *abschneide. Die Linie* GK *ist also, weil jenes Verhältniss bekannt ist, gegeben vermittelst Fall* 4, I *des ersten Buches.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Nimm* m : p = EG : GN. *Es werden aber zwei Linien in derselben Ebene, nämlich* TU, CD, *gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU. *Ziehe also, wie in Fall* 4, I *gelehrt wird, die Linie* GHK, *welche das Verhältniss* NP : FK *gleich* p : n *abschneide; ich behaupte, dass diese Linie* GHK *die Aufgabe löse. Denn weil* EG : GN = EH : NP *und* m : p = EG : GN, *so ist*

EH : NP = m : p.

Es ist aber . . . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n. *Mithin löst die Linie* GK *die Aufgabe, und zwar allein.*

Cas. II. Fig. 28. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche von* EB, FM *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* EG, *welche der* CD *im Punkte* N *begegne; und durch den gegebenen Punkt* N *ziehe die Linie* TU *der* AB *parallel, welche also der Lage nach gegeben ist. Weil nun die Punkte* E, N, G *gegeben sind, so sind die Linien* EG, GN, *also auch ihr Verhältniss gegeben. Weil aber* EG : GN = EH : NP, *so ist das Verhältniss* EH : NP, *mithin, weil das Verhältniss* EH : FK *gegeben wird, auch das Verhältniss* NP : FK *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien in derselben Ebene gegeben, nämlich* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU.

Es ist daher die Linie GK *zu ziehen, welche vermittelst Fall* 4, II *des ersten Buches gegeben seyn wird.*

Determination. Zur Composition ist aber erforderlich, dass das gegebene Verhältniss grösser sey als EM : MF. *Denn weil* EH > EM, *aber* FK < FM: *so ist* EH : EM > FK : FM *und* perm. EH : FK > EM : MF. *Das gegebene Verhältniss muss also grösser als* EM : MF *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *grösser als* EM : MF. *Verbinde* GE, GM, *(ziehe durch* N *der* AB *eine Linie* TU *parallel, welche die* GM *in* J *schneide)* *) *und mache* m : p = EG : GN. *Weil nun* EG : GN = m : p *und* EM : NJ = EG : GN, *so ist*

EM : NJ = m : p.

Es ist aber . . . . . EM : MF < m : n,

folglich ist aus dem Gleichen NJ : MF < p : n. *Wenn also nach Fall* 4, II *aus* G *eine gerade Linie gezogen wird, welche von* TU, FN *ein Verhältniss gleich* p : n *abschneidet: so wird sie die Linie* FM *treffen, das ist jenseit* **) *des Punktes* M *fallen. Denn wäre sie dem Punkte* N *näher, so würde sie ein kleineres Verhältniss abschneiden. Die Construction ist aber dieselbe wie in Fall* 4, II. *Es schneide also die Linie* GK *das Verhältniss* NP : FK *gleich* p : n *ab; ich behaupte, dass* GK *die Aufgabe löse. Denn weil* EG : GN = m : p, *und* EH : NP *wie* EG : GN, *so ist auch*

EH : NP *wie* m : p.

Nun ist . . . . . NP : FK *wie* p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n. *Mithin löst die Linie* GK *die Aufgabe, und zwar allein.*

Cas. III ***). Fig. 29. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* EA, FC *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem ge-*

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

**) *nämlich in Bezug auf den Punkt* N.

***) Cas. III *und* IV *folgen in verkehrter Ordnung auf einander.*

gebenen abschneide. Verbinde EG. *Weil die Punkte* E, G *gegeben sind, so ist die Linie* EG *gegeben. Es wird aber* CD *der Lage nach gegeben, also der Punkt* N. *Durch* N *ziehe der* AB *eine Parallele, wie* TU, *so ist die Linie* TU *der Lage nach gegeben. Weil nun* *) *die Punkte* E, N, G *gegeben sind, so sind es auch die Linien* EG, GN, *mithin ihr Verhältniss. Es ist aber* EG : GN = EH : NP, *mithin ist das Verhältniss* EH : NP *gegeben. Nun wird aber auch* EH : FK *gegeben, folglich ist das Verhältniss* NP : FK *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien in derselben Ebene gegeben, nämlich* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der Punkt* G, *aus welchem die schneidende Linie zu ziehen ist, liegt im W.* CNU. *Es ist also die Linie* GP *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : FK *abschneide. Mithin ist die Linie* GPH *vermittelst Fall* 4, III *des ersten Buches gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *und mit Beibehaltung des Vorigen mache* m : p = EG : GN. *Da nun in derselben Ebene die geraden Linien* TU, CD *der Lage nach gegeben werden; in* TU *der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen wird; und der gegebene Punkt* G *im W.* CNU *liegt: so ziehe nach Fall* 4, III *die Linie* GP, *welche das Verhältniss* NP : FK = p : n *abschneide, und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *der Aufgabe genüge. Denn es ist* EG : GN = m : p, *mithin ist auch*

EH : NP = m : p.

Nun ist aber . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n. *Demnach löst die Linie* GH *die Aufgabe und zwar allein.*

---

*) *Im Lat. steht unrichtig:* Datis autem recta *TU*, punctisque *E, N, G.*

Cas. IV. Fig. 30. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* EM, FC *die Segmente* EH, FK *in dem gegebenen Verhältnisse abschneide. Verbinde* GE. *Da die Punkte* G, E *gegeben sind, so ist die Linie* GE *gegeben. Es ist aber* CD *gegeben, also der Punkt* N. *Durch den Punkt* N *ziehe der* AB *eine Linie* TU *parallel, so ist die Linie* TU *der Lage nach gegeben. Weil nun die Punkte* E, N, G *gegeben sind, so sind es auch die Linien* EG, GN, *mithin das Verhältniss* EG : GN. *Es ist aber* EG : GN = EH : NP, *daher ist das Verhältniss* EH : NP *gegeben. Nun wird aber auch* EH : FK *gegeben, folglich ist das Verhältniss* NP : FK *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* TU, CD *in derselben Ebene der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU. *Es ist daher eine gerade Linie, wie* GH, *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : FK *abschneide. Folglich ist die Linie* GH *vermittelst Fall* 4, II *des ersten Buches gegeben.*

Determination. Zur Construction aber ist erforderlich, dass das gegebene Verhältniss kleiner als EM : MF *sey. Denn weil* ME > EH *und* MF < FK, *so ist* ME : EH > MF : FK *und* perm. EM : MF > EH : FK. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss, folglich muss das zur Construction gegebene Verhältniss kleiner als* EM : MF *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *kleiner als* EM : MF. *Verbinde* GM *und mache* m : p = EG : GN. *Weil nun* EM : NJ = EG : GN, *und* EG : GN = m : p, *so ist*

EM : NJ = m : p.

Es ist aber . . . . . EM : MF > m : n,

folglich ist, wenn man die Hinterglieder vergleicht, NJ : FM > p : n. *Die Linie also, welche aus* G *gezo-*

gen wird und von NU, FN *ein Verhältniss gleich* p : n *abschneidet, wird die* MN *treffen. (Denn es sind zwei gerade Linien* TU, CD *gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU. *Wird also nach Fall* 4, II *die Linie* GM *gezogen, welche das Verhältniss* NJ : FM, *das grösser ist als* p : n, *abschneidet, und wird hierauf verlangt eine andere, wie* GK, *zu ziehen, welche ein dem Verhältnisse* p : n *gleiches Verhältniss abschneide: so wird diese Linie diesseit des Punktes* M *fallen, oder zwischen die Punkte* M *und* N;) **) weil, wie in der genannten Stelle gelehrt wird, die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren. Verlängere nun* GK *nach* H; *ich behaupte, dass* GH *die Aufgabe löse. Denn es ist* EG : GN = EH : NP, *mithin ist*

EH : NP *wie* m : p.

Es ist aber, ... NP : FK *wie* p : n,

folglich aus dem Gleichen EH : FK = m : n. *Die Linie* GH *genügt also der Aufgabe.*

Cas. V. Fig. 31. *Analysis. Es werde nach der fünften Art die Linie* HK *gezogen, welche von* EB, FC *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE, *so ist wegen der gegebenen Punkte* G, E *die Linie* GE *gegeben, also, weil auch* CD *der Lage nach gegeben wird, der Punkt* N. *Ziehe nun durch den Punkt* N *die Linie* TU *mit* AB *parallel, so ist die Lage der* TU *bekannt. Weil aber die Punkte* E, N, G *gegeben sind, so hat man die Linien* EG, GN *und das Verhältniss derselben. Nun ist* EG : GN = EH : NP, *mithin ist das Verhältniss* EH : NP *gegeben. Es wird aber das Verhältniss*

*) *Die eingeklammerten Sätze können entbehrt werden.*

EH : FK *gegeben, folglich auch das Verhältniss* NP : FK. *Es werden also zwei gerade Linien* TU, CD *der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU. *Es ist daher eine gerade Linie zu ziehen, wie* GK, *welche von jenen Linien das Verhältniss* NP : FK *abschneide. Folglich ist die Linie* GK *vermittelst Fall* 4, IV *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *und es werde* m : p = EG : GN *genommen. Es sind nun zwei gerade Linien* TU, CD *in derselben Ebene der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* CNU *und das abzuschneidende Verhältniss ist* p : n. *Es werde also nach Fall* 4, IV *die Linie* GK *gezogen, welche die Segmente* NP, FK *in dem Verhältnisse* p : n *abschneide* *), *und sie werde nach* H *verlängert. Ich behaupte, dass die Linie* HPK *die Aufgabe löse. Denn es ist* EG : GN = EH : NP, *und* EG : GN = m : p, *mithin ist*

EH : NP = m : p.

Nun ist aber . . . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n.

Fall 2.

Es sind zwei unbegränzte gerade Linien der Lage nach gegeben, wie *AB*, *CD*, welche sich im Punkte *M* schneiden, und in *AB* wird der Punkt *E*, in *CD* aber der Punkt *F* genommen. Der gegebene Punkt *G* liege im W. *DMB* und die durch *G* mit *AB* parallel gezogene Linie gehe erstlich durch den Punkt *F*. Die aus *G* ausgehenden Linien lassen sich auf vier

*) *Im Lat. folgt hier noch:* datur itaque recta *PK*.

Arten ziehen; entweder nämlich werden die Segmente in *EB*, *FD* genommen; oder in *EA*, *FC*; oder in *EM*, *MF*; oder endlich in *EB*, *FC*.

Cas. I. Fig. 32. *Analysis. Es werde nun erstlich nach der ersten Art die Linie* HGK *gezogen, welche von* EB, FD *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE. *Da die Punkte* G, E *und die Linie* CD *der Lage nach gegeben sind, so ist die Linie* GE *und der Punkt* N *gegeben. Zieht man nun durch den Punkt* N *eine Linie, wie* TU, *der* AB *parallel, so ist auch* TU *der Lage nach bekannt. Es sind aber die Linien* EG, GN *gegeben, mithin das Verhältniss derselben. Nun ist* EG : GN = EH : NP, *daher ist das Verhältniss* EH : NP *ebenfalls bekannt. Es wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben, folglich auch das Verhältniss* NP : FK. *Es werden also zwei gerade Linien in derselben Ebene der Lage nach gegeben, nämlich* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU, *und die durch* G *der* TU *parallel gezogene Linie geht durch* F. *Es ist also die Linie* GK *zu ziehen, welche ein dem Verhältnisse* NP : FK *gleiches Verhältniss abschneide. Folglich ist die* KGH *vermittelst Fall* 5, I *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Nimm* m : p = EG : GN. *Es werden nun in derselben Ebene zwei gerade Linien gegeben, nämlich* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU *und das abzuschneidende Verhältniss ist* p : n. *Ziehe also nach Fall* 5, I (*weil die Parallele durch den Punkt* F *geht*) *die Linie* GK, *welche das Verhältniss* NP : FK *gleich dem gegebenen* p : n *abschneide, und verlängere die Linie* KGP *nach* H: *so behaupte*

ich, dass sie der Aufgabe genüge. Denn weil EG : GN = EH : NP *und auch* EG : GN = m : p, *so ist*

EH : NP = m : p.

Es ist aber . . . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n, *mithin löst die Linie* HGK *die Aufgabe.*

Cas. II. Fig. 33. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* EA, FC *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE, *und da der Punkt* N *gegeben ist, ziehe durch denselben eine Linie mit* AB *parallel, wie* TNU; *so ist die Linie* TNU *der Lage nach bekannt. Es ist aber das Verhältniss* EG : GN *gegeben, mithin auch, weil* EH : NP = EG : GN *ist, das Verhältniss* EH : NP. *Nun wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben, folglich ist es auch das Verhältniss* NP : FK. *Es werden also zwei gerade Linien* TU, CD *der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU, *und die Parallele geht durch den Punkt* F. *Es ist also eine Linie, wie* GK, *zu ziehen, welche von* NT, FC *das Verhältniss* NP : FK *abschneide. Diese Linie* GKP *ist aber vermittelst Fall* 5, II *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *und es werde* m : p *gleich* EG : GN *gemacht. Es sind aber zwei gerade Linien in derselben Ebene gegeben, nämlich* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU; *die Parallele geht durch den Punkt* F *und das gegebene Verhältniss ist* p : n. *Es werde also nach Fall* 5, II *die gerade Linie* GKP *gezogen, welche das Verhältniss* NP : FK *gleich* p : n *abschneide. Verlängere sie nach* H; *ich behaupte, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse. Denn weil*

EG : GN = EH : NP *und auch* EG : GN = m : p, *so ist*
EH : NP = m : p.
Es ist aber . . . . . NP : FK = p : n,
folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n. *Die Linie* GKH *löst also die Aufgabe.*

Cas. III, Fig. 34. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, welche von* EM, MF *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Verbinde* GE *und ziehe durch* N *die Linie* TU *der* AB *parallel, so ist* TNU *der Lage nach gegeben. Weil aber* EG : GN = EH : NP, *so ist das Verhältniss* EH : NP *gegeben; folglich, weil das Verhältniss* EH : FK *gegeben wird, ist auch das Verhältniss* NP : FK *bekannt. Es werden also in derselben Ebene zwei gerade Linien der Lage nach gegeben, nämlich* TU, CD; *und in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *aber liegt im W.* DNU *und die Parallele geht durch den Punkt* F. *Es ist daher die Linie* GK *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : FK *gleich einem gegebenen abschneide. Folglich ist die Linie* GK, *welche das Verlangte leisten wird, vermittelst Fall* 5, III *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Determination. Die Linie FN *wird entweder kleiner seyn als* NM, *oder nicht kleiner* *). *Sie sey aber erstlich nicht kleiner als* NM. *Verbinde* GM, *so behaupte ich, dass die Linie* GM *ein grösseres Verhältniss* EM : MF *abschneide als jede andere, welche aus* G *nach* EM, MN *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere Linie wie* GKH. *Weil* FN *nicht kleiner ist als* NM, *so wird das durch* GM *abgeschnittene Verhältniss* NJ : FM *um so grösser seyn, je näher* GM *der das grösste Verhältniss abschneidenden*

*) *Im Lat. steht unrichtig:* vel major. *Derselbe Fehler findet sich in der Synthesis.*

Linie ist; mithin grösser als das durch GKH *abgeschnittene, wie diess in Fall* 5, III *des ersten Buches bewiesen worden ist. Es ist also* NJ : FM > NP : FK *und* perm. NJ : NP > FM : FK. *Nun ist* NJ : NP = EM : EH, *mithin ist auch* EM : EH > FM : FK *und* perm. EM : MF > EH : FK. *Die Linie* GM *schneidet also ein grösseres Verhältniss* EM : MF *ab als jede aus* G *nach* EM, MN *mögliche gerade Linie.*

Wenn aber FN *kleiner ist als* NM, *so sey* KN = NF, *Verbinde* GK *und verlängere sie nach* H, *ziehe auch* GM, *Ich behaupte, dass die Linie* GKH *ein grösseres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere, die aus* G *nach* EM *gezogen werden kann; die Linie* GM *aber ein kleineres* EM : MF *als jede beliebige aus* G *nach* HM *mögliche Linie. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GRQ, *welche die* EH *trifft. Weil nun* FN = NK, *so ist die Linie* GKH *der Lage nach gegeben und schneidet nach Fall* 5, III *des ersten Buches das grösste Verhältniss* NP : FK *ab; mithin ist, wie daselbst bewiesen wird,* NP : FK > NS : FR. *Daher ist* perm. NP : NS > FK : FR. *Es ist aber* NP : NS = EH : EQ, *folglich ist* EH : EQ > FK : FR *und* perm. EH : FK *grösser als* EQ : FR. *Ebenso wird bewiesen, dass, wenn irgend eine andere Linie aus* G *nach* HM *gezogen wird, die Linie* GKH *das grösste Verhältniss* EH : FK *abschneide. Ich behaupte ausserdem, dass* GM *ein kleineres Verhältniss* EM : MF *als jede andere Linie abschneide, die aus* G *nach* HM, MK *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere Linie nach* HM *wie* GZWV. *Da* GH *das grösste Verhältniss abschneidet und die Linie* GWV *derselben näher ist als* GM: *so ist* NZ : FW > NJ : FM *und* perm. NZ : NJ > FW : FM. *Es ist aber* NZ : NJ = EV : EM, *folglich ist auch* EV : EM > FW : FM *und* perm. EV : FW > EM : MF, *mithin* EM : MF < EV : FW. *Die Linie* GK *schneidet also unter allen aus* G *nach* EM *möglichen Linien das grösste Verhältniss* EH : FK

ab, die Linie GM *aber ein kleineres* EM : MF *als jede andere, die aus* G *nach* HM *gezogen werden kann.*

Synthesis. Die Linie FN *ist entweder kleiner oder nicht kleiner als* NM. *Es sey nun zuerst* FN *nicht kleiner als* NM. *Verbinde* GM, *so schneidet* GM *ein grösseres Verhältniss* EM : MF *ab als jede andere Linie, die, aus* G *nach* EM *gezogen werden kann. Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* EM : MF, *so wird die Linie* GM *der Aufgabe genügen. Ist aber das Verhältniss grösser als* EM : MF, *so wird das Problem nicht gelöst werden, weil die Linie* GM *das grösste Verhältniss* EM : MF *abschneidet. Wenn es aber kleiner ist als* EM : MF, *so wird nur eine Auflösung möglich seyn. Es sey also das Verhältniss* m : n *kleiner als* EM : MF *gegeben; mache* m : p = EG : GN *und ziehe durch den Punkt* N *die Linie* TNU *der* AB *parallel. Weil nun* EG : GN = EM : NJ *und auch* EG : GN = m : p, *so ist* EM : NJ = m : p *und* invert,

$$NJ : EM = p : m,$$

Es ist aber . . . . EM : MF > m : n,

folglich ist aus dem Gleichen NJ : FM > p : n. *Es werden also zwei gerade Linien* TU, CD *der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; die Parallele geht durch den Punkt* F; *die Linie* FN *ist nicht kleiner als* NM *und das Verhältniss* p : n *ist kleiner als das grösste* NJ : FM, *welches* GM *abschneidet. Ziehe also nach Fall* 5, III *aus* G *eine Linie, welche von* NU, FM *ein Verhältniss gleich* p : n *abschneide. Diess kann aber auf zweierlei Weise geschehen; jedoch wird nur eine von beiden Linien die* MN *treffen, indem die andere jenseit des Punktes* M *fällt. Es sey nun* GPK *jene Linie, welche das Verhältniss* NP : FK *gleich* p : n *abschneidet; ich behaupte, dass die Linie*

:PKH *die Aufgabe löse. Denn es ist* EG : GN =
:H : NP *und* EG : GN = m : p, *mithin ist*

EH : NP = m : p.

Nun ist . . . . . NP : FK = p : n,

olglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n *und ie Linie* GH *genügt also der Aufgabe.*

Es sey nun FN *kleiner als* NM. *Mache* KN = NF, *erbinde* GK *und verlängere sie nach* H, *ziehe auch* M: *so schneidet* GKH *das Verhältniss* EH : FK *ab, elches grösser ist als jedes andere, das durch irgend ine Linie aus* G *nach* EM *abgeschnitten werden kann; ie Linie* GM *dagegen ein kleineres Verhältniss* EM : MF *ls jede andere aus* G *nach* HM *mögliche Linie. Denn die Linie* GKH *schneidet (nach Fall* 5, III*) in Verhältniss* NP : FK *ab, welches grösser ist als* NJ : FM*; verwechselt also wird das Verhältniss* NP : NJ *grösser seyn als das Verhältniss* FK : FM. *Es ist aber* NP : NJ = EH : EM, *folglich st* perm. EH : FK > EM : MF. *Die Linie* GH *also chneidet das Verhältniss* EH : FK *ab grösser als jedes ndere durch irgend eine Linie aus* G *nach* EM. *Die Linie* GM *dagegen bestimmt das Verhältniss* EM : MF, *welches kleiner ist als jedes andere, das urch irgend eine Linie aus* G *nach* HM *abgeschnitten werden kann. Denn ziehe eine Linie* GZW. *Weil diese Linie der das grösste Verhältniss abschneilenden näher ist als* GM, *so wird* GZW *ein grösseres Verhältniss als* GM *abschneiden. Daher ist* NZ : FW > NJ : FM, perm. *also wird das Verhältniss* NZ : NJ *grösser als das Verhältniss* FW : FM *eyn. Es ist aber* NZ : NJ = EV : EM, *folglich ist* erm. EV : FW > EM : MF*; mithin schneidet* GM *das leinste Verhältniss ab.*] *) *Wenn also zur Construction ein Verhältniss gegeben wird, welches gleich*

*) *Der eingeklammerte Satz ist offenbar ein Glossem.*

ist EH : FK, *so genügt die Linie* GH *allein der Aufgabe, weil das Verhältniss das grösste ist. Ist a grösser, so ist die Auflösung nicht möglich, weil a grösser als das grösste ist. Wenn das Verhältniss kleiner ist als* EH : FK, *aber grösser als* EM : MF, *so kann das Problem auf zweierlei Weise gelöst werden, nämlich zu beiden Seiten der* GKH. *Ist a aber nicht grösser als* EM : MF, *dann wird nur auf eine Weise construirt, nämlich zwischen* H *und* E. *Es sey nun zuerst das gegebene Verhältniss* m : n *kleiner als* EH : FK, *aber grösser als* EM : MF. *Mache* m : p = EG : GN, *so ist auch* EH : NP = m : p *und* invert.

NP : EH = p : m,

Es ist aber . . . . . EH : FK > m : n,

folglich ist aus dem Gleichen NP : FK > p : n. *Ferner, weil* EG : GN = m : p *und auch* = EM : NJ, *so ist* EM : NJ = m : p *und* invert,

NJ : EM = p : m.

Es ist aber . . . . . EM : MF < m : n,

folglich ist aus dem Gleichen NJ : FM < p : n. *Wir haben also bewiesen, das das Verhältniss* NP : FK *grösser sey als* p : n, *und die Linie* GK *scheidet, wie in Fall* 5, III *gezeigt worden ist, das grösste Verhältniss ab. Wenn also nach Fall* 5, III *aus* G *gerade Linien gezogen werden, welche von* NJ, FG *Segmente in dem Verhältnisse* p : n *abschneiden: so erhält man zwei Linien, nämlich auf beiden Seiten der* GH. *Eine derselben, wie* GSQ, *wird die* NK *treffen; ich behaupte, dass die andere der* KM *begegne. Denn weil die der* GH *näheren geraden Linien immer grössere Verhältnisse abschneiden als die von ihr entfernteren, und das Verhältniss* p : n *grösser als* NJ : FM *ist: so wird die aus* G *gezogene Linie, welche das Verhältniss* p : n *abschneidet, der* GH *näher seyn als die Linie* GM. *Ist also die Linie*

W *so gezogen und nach* V *verlängert, so behaupte , dass auch sie der Aufgabe Genüge leiste. Denn ist* EG : GN, *das ist* EV : NZ = m : p *und* NZ : FW = n, *folglich ist aus dem Gleichen* EV : FW = m : n. e *Linie* GWV *genügt also der Aufgabe; und es ist r, dass die andere oder* GSQ *dasselbe leiste.*

Endlich sey das gegebene Verhältniss m : n *nicht sser als* EM : MF. *Nimm* m : p = EG : GN, *so erlet aus der vorhergehenden Untersuchung, dass s Verhältniss* p : n *nicht grösser als* NJ : FM, *hin gewiss kleiner als* NP : FK *sey. Weil also* n *kleiner ist als* NP : FK *das ist als das grösste rhältniss: so ziehe nach Anleitung von Fall* 5, III *ei gerade Linien zu beiden Seiten der* GPH, *welche dem Verhältnisse* p : n *gleiches Verhältniss abneiden. Die eine derselben wird zwischen* GK, *fallen, die andere aber die* KMC *treffen. Weil r jede der* GK *nähere gerade Linie ein grösseres rhältniss abschneidet als die von ihr entferntere, l das Verhältniss* p : n, *weil es nicht grösser als* : FM *ist, entweder gleich ist demselben oder klei- : so wird, wenn es gleich demselben ist, die Li-* GM *das Verlangte leisten; wenn es aber kleiner als* NJ : FM, *die Linie jenseit der* GM *fallen, hin, da sie* EM *nicht trifft, der Aufgabe nicht ügen. Die andere Linie dagegen, welche zwischen , GKH fällt, wird das Problem lösen.*

Cas. IV. Fig. 35. *Analysis. Es werde nun h der vierten Art die Linie* GK *gezogen, welche* EB, FC *das Verhältniss* EH : FK *gleich dem geenen abschneide. Verbinde* GE *und durch den bemten Punkt* N *ziehe eine Linie wie* TNU *der* AB *allel: so ist* TU *der Lage nach gegeben. Weil a das Verhältniss* EG : GN *oder* EH : NP *gegeben und das Verhältniss* EH : FK *gegeben rd, so ist auch das Verhältniss* NP : FK

gegeben. Es werden also zwei gerade Linien TU, CD *der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU *und die Parallele geht durch* F. *Es ist daher die gerade Linie* GPK *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : FK *abschneide. Folglich ist diese Linie vermittelst Fall* 5, III *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Determination. Die Linie FN *kann entweder grösser oder nicht grösser* *) *als* NM *seyn. Sie sey nun zuerst nicht grösser als* NM. *Verbinde* GI; *ich behaupte, die Linie* GM *schneide das Verhältniss* EM : MF *ab grösser als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* MC. *Denn ziehe eine andere, wie* GPK. *Da* FN *nicht grösser ist als* NM, *so wird* GM *entweder das grösste Verhältniss* NJ : MF *abschneiden oder der das grösste abschneidenden näher als* GK *seyn. Daher ist* NJ : FM > NP : FK *und perm.* NJ : NP > FM : FK. *Nun ist* NJ : NP = EM : EH, *folglich ist* EM : EH > FM : FK *und perm.* EM : MF > EH : FK. *Die Linie* GM *schneidet also ein grösseres Verhältniss* EM : MF *ab als jede andere aus* G *nach* MC *mögliche gerade Linie.*

Es sey nun FN *grösser als* NM. *Mache* KN = NF *und verbinde* GK: *so behaupte ich, dass* GK *ein grösseres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere Linie, welche aus* G *nach* MC *gezogen werden kann. Denn ziehe zwei Linien zu beiden Seiten der* GK, *wie* GW, GR. *Weil* FN = NK, *so schneidet nach Fall* 5, II *die Linie* GK *das grösste Verhältniss* NP : FK *ab.* [*Denn die Linien* TU, CD *werden der Lage nach gegeben; in* TU *wird der Punkt* N, *und in* CD *der Punkt* F *gegeben; die durch* G *gezogene*

*) *Im Lat. steht unrichtig:* vel minor. *Derselbe Fehler ist in der Synthesis.*

arallele trifft den Punkt F *und es ist* KN = NF.] *) *aher ist* NP : FK > NS : FR *und* perm. NP : NS > K : FR. *Es ist aber* NP : NS = EH : EQ, *also* EH : EQ > FK : FR. *Folglich ist* perm. *das Verhältniss* EH : FK *grösser als das Verhältniss* Q : FR. *Aus denselben Gründen wird bewiesen, ass die andere Linie* GW *ein kleineres Verhältniss ls* GK *abschneide. Folglich schneidet die Linie* GK *ie grösseres Verhältniss* EH : FK *ab als jede andere us* G *nach* MC *mögliche Linie. Ich behaupte ausrdem, dass das Verhältniss* EM : MF, *welches* GM *estimmt, kleiner sey als jedes andere durch eine eliebige Linie aus* G *nach* KM. *Denn die Linie* W *ist der das grösste Verhältniss abschneidenden der der* GK *näher als die Linie* GM; *daher ist* NZ : FW > NJ : FM *und* perm. NZ : NJ > FW : FM. *Es ist aber* NZ : NJ = EV : EM, *folglich ist* EV : EM > FW : FM *und* perm. EV : FW > EM : MF. *Die Linie* GM *schneidet also ein kleineres Verhältniss* EM : MF *ab als jede andere Linie, die aus* G *nach* KM *gezogen werden kann.*

Synthesis. Die Linie FN *kann entweder grösser oder nicht grösser als* NM *seyn. Es sey nun zuerst* FN *nicht grösser als* NM. *Verbinde* GM, *so wird diese Linie ein grösseres Verhältniss* EM : MF *abschneiden als jede beliebige Linie, welche aus* G *nach* MC *möglich ist. Wenn nun das gegebene Verhältniss gleich ist* EM : MF, *so löst* GM *allein die Aufgabe, indem sie nämlich jenes grösste Verhältniss abschneidet. Ist das gegebene Verhältniss grösser, dann kann das Problem nicht gelöst werden, weil das gegebene Verhältniss grösser ist als das grösste. Wenn aber ein kleineres gegeben wird, so ist die*

*) *Die eingeklammerten Worte scheinen ein Glossem zu seyn.*

Auflösung möglich, aber nur auf eine Weise. Es sey also das gegebene Verhältniss m : n *kleiner als* EM : MF. *Nimm* m : p = EG : GN. *Da nun* EG : GN = EM : NJ, *so ist auch* EM : NJ = m : p *und* invert.

NJ : EM = p : m.

Es ist aber . . . . EM : MF > m : n,

folglich ist aus dem Gleichen p : n *kleiner als* NJ : FM, *das ist kleiner als das grösste Verhältniss. Ziehe also nach Fall* 5, III *zwei gerade Linien, zu beiden Seiten der* GM, *welche von* NJ, FC *das Verhältniss* p : n *abschneiden. Aber nur eine derselben, wie* GK, *welche das Verhältniss* NP : FK *gleich* p : n *bestimmt, wird die* MC *treffen; ich behaupte, dass die Linie* GK *das Verlangte leiste. Denn es ist* EG : GN = m : p *und* EH : NP = EG : GN, *mithin auch*

EH : NP = m : p.

Ferner ist . . . . NP : FK = p : n,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n, *und desshalb löst* GK *die Aufgabe. Die andere Linie aber wird die* MC *nicht treffen und desshalb dem Problem nicht genügen, welches daher nur auf die angegebene Art construirt werden kann.*

Die Linie FN *sey nun grösser als* NM. *Mache* KN = NF *und verbinde* GM, GK. *Weil* KN = NF, *wird* GK *ein grösseres Verhältniss* EH : FK *abschneiden als jede andere aus* G *nach* MC *mögliche Linie;* GM *dagegen ein kleineres* EM : MF *als jede beliebige Linie, die nach* KM *gezogen werden kann. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich* EH : FK, *so löst* GK *allein die Aufgabe. Wird ein grösseres als* EH : FK *gegeben, dann kann das Problem nicht construirt werden, weil das gegebene Verhältniss grösser als das grösste ist. Wenn ein Verhältniss gegeben wird, welches kleiner ist als* EH : FK, *grösser aber als* EM : MF, *so kann die Aufgabe auf zweierlei Weise construirt werden, weil sich zwei gerade Linien, zu beiden Sei-*

der GK, *nach* MC *ziehen lassen, welche dem Pro-*
ne Genüge leisten. Ist aber das Verhältniss nicht
ser als EM : MF, *dann hat die Aufgabe nur eine*
lösung. Es sey nun das gegebene Verhältniss m : n
ner als EH : FK, *aber grösser als* EM : MF. *Mache*
) = EG : GN. *Weil nun* EG : GN = EH : NP, *so*
uch EH : NP = m : p *und* invert.

NP : EH = p : m.

: *ist aber* . . . . . EH : FK > m : n,
lich ist aus dem Gleichen NP : FK > p : n. *Fer-*
weil EG : GN = EM : NJ *und* EG : GN = m : p, *so ist*

EM : NJ = m : p.

ist aber . . . . . EM : MF < m : n,
lich ist invert. *und aus dem Gleichen* NJ : FM <
. *Das Verhältniss* p : n *ist also kleiner als* NP : FK
grösser als NJ : FM. *Es ist aber* NP : FK *das*
ste nach Fall 5, III. *Ziehe also zwei gerade Li-*
: *durch den Punkt* G, *zu beiden Seiten der* GK,
he die MC *treffen und von den Linien* NU,
Verhältnisse gleich dem gegebenen oder gleich
abschneiden. Es seyen diess die Linien GR,
, *ich behaupte, dass jede derselben das Problem*
Denn weil EG : GN = m : p *und* EQ : NS =
GN, *so ist auch*

EQ : NS = m : p.

: *ist aber* . . . . . NS : FR = p : n,
lich ist aus dem Gleichen EQ : FR = m : n *und*
löst die Aufgabe. Aus gleichen Gründen wird
esen, dass auch die andere Linie GW *dem Pro-*
e genüge. Dass aber die Linie GW *nicht jen-*
*) *der* GM *falle, wird so bewiesen. Weil das*
ältniss p : n *kleiner ist als* NP : FK, *welches*
lich gleich ist dem grössten Verhältnisse (nach
5, III), *grösser aber als* NJ : FM, *welches die*

---

nämlich in Beziehung auf GK.

Linie GM *abschneidet; die Linien aber, welche der das grösste Verhältniss abschneidenden näher sind, grössere Verhältnisse bestimmen als die von derselben entfernteren: so wird die Linie* GW, *welche das Verhältniss* p : n *abschneidet, der* KM *begegnen.*

Es sey nunmehr das gegebene Verhältniss m : n *nicht grösser als* EM : MF, *so ist klar, dass das Verhältniss* p : n *nicht grösser sey als* NJ : FM, *also gewiss kleiner als* NP : FK *oder als das grösste. Ziehe also nach Fall* 5, III *zwei gerade Linien, zu beiden Seiten der* GK, *welche ein dem Verhältnisse* p : n *gleiches Verhältniss abschneiden. Die eine derselben wird die* MC *treffen und desshalb der Aufgabe genügen, wie im Vorhergehenden bewiesen worden ist; die andere aber wird das Problem nicht lösen, weil sie nicht der* KM *sondern der* MN *begegnet. Denn weil die der* GK *näheren geraden Linien grössere Verhältnisse bestimmen als die von ihr entfernteren und das Verhältniss* p : n *kleiner* *) *als* NJ : FM *ist: so wird die andere Linie weiter als* GM *von* GK *entfernt seyn und desshalb die* MN *treffen.*

Fall 3.

Es treffe nun die Linie, welche durch den Punkt *G* der *AB* parallel gezogen wird, die andere Linie *CD* diesseit des Punktes *F* oder zwischen demselben und dem Punkte *M*, wie die Linie *GL*; so ist klar, dass aus *G* auf fünf verschiedene Arten gerade Linien gezogen werden können.

Cas. I. Fig. 36. *Analysis. Es werde zuerst eine Linie gezogen nach der ersten Art, welche die Segmente* EH *und* FK *in dem gegebenen Verhältniss*

*) *Sorgfältiger gearbeitet ist der Schluss der Synthesis in* Cas III.

abschneide. Verbinde GE *und durch den Punkt* N *ziehe eine Linie der* AB *parallel, wie* TNU. *Weil das Verhältniss* EG : GN *bekannt ist, so ist es auch* EH : NP; *und weil das Verhältniss* EH : FK *gegeben wird, so ist auch das Verhältniss* NP : FK *gegeben. Es sind also zwei gerade Linien der Lage nach gegeben* TU, CD; *in* TU *wird der Punkt* N, *in* CD *aber der Punkt* F *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* DNU. *Es ist daher eine gerade Linie* HGK *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* NP : FK *abschneide; mithin ist die Linie* HGK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 7, I, *woselbst keine Gränze statt findet. Die Construction aber erhellet aus der dort vorgetragenen Auflösung.*

Cas. II. Fig. 37. *Analysis. Es werde nach der zweiten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : NP, *so wie das Verhältniss* NP : FK *gegeben ist, so ist die Linie* HK *durch Fall* 7, II *der Lage nach gegeben.*

Determination. Nimm NK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LN *und* NF, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H: *ich behaupte, dass die Linie* HK *ein kleineres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere, die aus* G *nach* LF *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere, wie* QGR. *Weil* NK *die mittlere Proportionale ist zwischen* LN *und* NF, *so ist* NP : FK < NS : FR *und* perm. NP : NS < FK : FR. *Es ist aber* NP : NS = EH : EQ, *folglich* EH : EQ < FK : FR *und* perm. EH : FK < EQ : FR. *Die Linie* HK *schneidet also ein kleineres Verhältniss* EH : FK *ab als jede andere Linie, die aus* G *nach* LF *gezogen werden kann.*

Synthesis. Mache NK *gleich der mittlern Proportionale zwischen* LN *und* NF, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H: *so schneidet* HK *ein kleineres*

Verhältniss EH : FK *ab als jede andere aus* G *nach* LF *mögliche Linie. Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* EH : FK, *dann löst* HK *allein die Aufgabe. Ist es kleiner, so ist die Auflösung nicht möglich. Ist es aber grösser, so wird auf zweierlei Weise construirt werden, nämlich zu beiden Seiten der* HK. *Es sey also das gegebene Verhältniss* m : n *grösser als* EH : FK. *Mache* m : p = EG : GN, *so wird aus dem Gleichen geschlossen, dass* p : n *grösser als* NP : FK *sey.* *) *Hieraus folgt, dass sich aus dem Punkte* G *zwei gerade Linien, zu beiden Seiten der* HK, *ziehen lassen, welche von* NP, FL *Verhältnisse gleich* p : n *abschneiden; und aus früheren Beweisen erhellet, dass diese so gezogenen Linien die Aufgabe lösen.*

Cas. III. Fig. 38. *Analysis. Es werde jetzt nach der dritten Art eine Linie gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : NP *und auch das Verhältniss* NP : FK *gegeben ist: so ist die Linie* GH *der Lage nach gegeben, vermittelst Fall* 7, III, *woselbst keine Gränze statt findet. Die Construction ist daher deutlich.*

Cas. IV. Fig. 39. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : NP *bekannt ist, so ist auch das Verhältniss* NP : FK *und somit die Linie* GH *der Lage nach gegeben. Die Aufgabe kommt nämlich auf Fall* 7, IV *zurück.*

Determination. Nimm die mittlere Proportionale zwischen LN *und* NF. *Diese wird entweder kleiner oder nicht kleiner als* NM *seyn. Sie sey zu-*

*) *Im Lat. folgt hier noch:* Sed ratio *NS* ad *FR* major est ea; quia *NK* media proportionalis est inter *FN* et *NL*. *Diess ist vielleicht so zu verbessern:* Sed ratio *NP* ad *FK* est minima; quia etc.

erst nicht kleiner als NM. *Verbinde* GM, *so behaupte ich, dass die Linie* GM *ein grösseres Verhältniss* EM : MF *abschneide als jede beliebige Linie, welche aus* G *nach* EM *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GH. *Weil die mittlere Proportionale zwischen* LN, NF *nicht kleiner ist als* NM, *so wird die Linie* GM *entweder das grösste Verhältniss* NJ : FM *abschneiden oder der das grösste abschneidenden näher seyn als die Linie* GH. *Daher ist* NJ : FM > NP : FK *und* perm. JN : NP *grösser als* FM : FK. *Es ist aber* JN : NP = ME : EH, *folglich ist* ME : EH > FM : FK *und* perm. EM : MF > EH : FK. *Die Linie* GM *schneidet also ein grösseres Verhältniss* EM : MF *ab als jede andere aus* G *nach* EM *gehende Linie.*

Es sey nun die mittlere Proportionale zwischen LN, NF *kleiner als* NM, *wie* NK. *Verbinde* GM, GK *und verlängere* GK *nach* H. *Ich behaupte, dass* GH *ein grösseres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere Linie, welche sich aus* G *nach* EM *ziehen lässt;* GM *aber ein kleineres* EM : MF *als jede nach* HM *mögliche Linie. Denn ziehe zwei gerade Linien wie* GV, GQ. *Weil* NK *die mittlere Proportionale ist zwischen* LN *und* NF, *so schneidet die Linie* GK *das grösste Verhältniss ab. Es ist also* NP : FK > NS : FR *und* perm. NP : NS > FK : FR. *Nun ist* NP : NS = EH : EQ, *folglich ist* EH : EQ > FK : FR *und* perm. EH : FK > EQ : FR. *Und ebenso wird bewiesen, dass jenes Verhältniss grösser als* EV : FW *sey. Die Linie* GH *schneidet demnach ein Verhältniss* EH : FK *ab, welches grösser ist als jedes Verhältniss durch irgend eine Linie, welche aus* G *nach* EM *gezogen werden kann. Ich behaupte ausserdem, dass die Linie* GM *ein Verhältniss* EM : MF *bestimme, kleiner als jedes Verhältniss, welches durch eine beliebige Linie, die aus* G *gezogen wird und* HM

trifft, abgeschnitten werden kann. Denn weil GV *näher ist der* GH, *welche das grösste Verhältniss abschneidet, als die Linie* GM; *und die jener Linie näheren immer grössere Verhältnisse bestimmen: so ist* NZ : FW > NJ : FM *und* perm. NZ : NJ > FW : FM. *Es ist aber* NZ : NJ = EV : EM, *folglich ist* EV : EM > FW : FM *und* perm. EV : FW > EM : MF. *Die Linie* GH *schneidet also unter allen aus* G *nach* EM *möglichen geraden Linien das grösste Verhältniss* EH : FK *ab, aber* GM *ein kleineres als jede andere Linie, welche die* HM *allein trifft.*

Synthesis. Die mittlere Proportionale zwischen LN, NF *ist entweder kleiner als* NM *oder nicht kleiner. Sie sey zuerst nicht kleiner. Verbinde* GM, *so schneidet diese Linie ein grösseres Verhältniss* EM : MF *ab als jede andere, die aus* G *nach* EM *gezogen werden kann. Ist also das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* EM : MF, *so wird* GM *und zwar allein das Verlangte leisten. Ist es grösser, so ist die Auflösung nicht möglich* *). *Wenn es aber kleiner ist, so wird das Problem nur auf eine Weise construirt werden. Es sey also das gegebene Verhältniss* m : n *kleiner als* EM : MF. *Mache* m : p = EG : GN, *so wird sich aus dem Gleichen beweisen lassen, dass* p : n *kleiner als* NJ : FM *sey. Folglich können aus* G *zwei gerade Linien gezogen werden, welche von* EM, MF *ein Verhältniss gleich* p : n *abschneiden. Diese Linien werden zu beiden Seiten der* GM *fallen; und es ist klar, dass die eine von jenen Linien, welche verlängert* EM *trifft, die Aufgabe löse, nicht aber die andere. Folglich wird nur auf eine Weise construirt.*

Es sey nun die mittlere Proportionale zwischen LN, NF *kleiner als* NM; *sie sey* NK. *Verbinde* GM,

*) *Dieser Satz fehlt im Lat.*

GK *und verlängere* GK *nach* H. *Dann schneidet unter allen aus* G *nach* EM *möglichen Linien* GH *das grösste Verhältniss* EH : FK *ab; die Linie* GM *aber ein kleineres Verhältniss* EM : MF *als jede andere Linie, die aus* G *nach* HM *gezogen werden kann. Ist nun zur Construction ein Verhältniss gleich* EH : FK *gegeben, so ist klar, dass* GH *allein die Aufgabe löse. Ist das gegebene Verhältniss grösser, so ist die Auflösung nicht möglich. Wenn es kleiner als* EH : FK, *grösser aber als* EM : MF *ist, so kann, wie aus dem Vorigen erhellet, auf doppelte Weise construirt werden, nämlich durch zwei Linien nach* EH, HM *zu beiden Seiten der* GH. *Wenn das gegebene Verhältniss gleich ist* EM : MF, *so erhellet ebenfalls aus der vorhergehenden Determination, dass das Problem auf zweierlei Weise gelöst werden könne, nämlich durch* GM *und durch eine andere Linie, wie* GQ. *Wenn aber das Verhältniss kleiner ist als* EM : MF, *dann wird eine von beiden Linien jenseit der* GM *fallen und also der Aufgabe nicht genügen.*

Cas. V. Fig. 40. *Analysis. Es werde nun nach der fünften Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : FK *und desshalb die Linie* GK *der Lage nach gegeben vermittelst der in der vierten Art des siebenten Falles gelehrten Construction. Hier findet aber eine Determination statt.*

Determination. Weil die mittlere Proportionale zwischen LN, NF *grösser oder nicht grösser* *) *als* NM *seyn kann, so sey sie zuerst nicht grösser als* NM. *Verbinde* GM, *so ist aus den vorhergehenden Gränzbestimmungen klar, dass unter allen aus* G *nach* MC *möglichen geraden Linien* GM *das grösste*

*) *Im Lat. steht:* vel minor.

Verhältniss EM : MF *abschneide. Wenn aber die mittlere Proportionale zwischen* LN, NF *grösser ist als* NM, *wie* NK: *so verbinde* GK, GM. *Dann folgt aus den vorigen Gränzbestimmungen, dass* GK *ein grösseres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere Linie, die aus* G *nach* NC *gezogen werden kann;* GM *aber unter allen nach* KM *möglichen das kleinste* EM : MF.

Synthesis. Die mittlere Proportionale zwischen LN, NF *wird entweder grösser seyn als* NM *oder nicht grösser. Sie sey erstlich nicht grösser. Verbinde* GM, *welche ein grösseres Verhältniss* EM : MF *abschneidet als jede andere aus* G *nach* MC *gezogene Linie. Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* EM : MF, *so löst* GM *die Aufgabe allein. Ist es grösser, so ist die Auflösung nicht möglich. Wenn es aber kleiner ist, so erhellet aus dem Vorigen, dass nur eine Linie nach* MC *gezogen werden könne, welche dem Probleme Genüge leistet.*

Wenn aber NK, *die mittlere Proportionale zwischen* LN *und* NF, *grösser ist als* NM: *so verbinde* GK, GM; *dann wird* GK *ein Verhältniss* EH : FK *abschneiden, welches grösser ist als jedes andere durch irgend eine Linie, die aus* G *gezogen wird und verlängert die* MC *trifft; die Linie* GM *dagegen wird (unter allen nach* MK *möglichen Linien) *) das kleinste Verhältniss abschneiden, nämlich das Verhältniss* EM : MF. *Wird nun zur Construction ein Verhältniss gegeben, welches gleich ist* EH : FK, *so wird offenbar* GK *allein die Aufgabe lösen; und ist es grösser, so ist die Auflösung nicht möglich. Ist es kleiner als* EH : FK *und grösser als* EM : MF, *so erhellet aus dem Vorhergehenden, dass das Problem auf zweierlei Weise gelöst werden könne durch Linien, die zu beiden Seiten der* GK *nach* MC *gezogen werden. Wenn*

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

es aber kleiner ist als EM : MF, *so kann, wie aus den vorhergehenden Gränzbestimmungen folgt, die Aufgabe nur auf eine Weise gelöst werden, nämlich durch eine Linie nach* KC. *Endlich wenn das Verhältniss gleich* EM : MF *ist, so giebt es zwei Auflösungen, indem sowohl* GM *als auch eine zweite Linie, welche die* MC *jenseit des Punktes* K *trifft, das Verlangte leistet. Alles dieses ergiebt sich aus den frühern Beweisen.*

Fall 4.

Es falle nunmehr die durch *G* mit *AB* parallel gezogene Linie jenseit des Punktes *F*, so dass *F* zwischen ihr und dem Punkte *M* sey; diese Parallele sey *GL*. Die durch *G*, *F* gezogene Linie aber wird verlängert die *AB* entweder im Punkte *E* selbst treffen; oder zwischen ihm und dem Punkte *A*; oder zwischen ihm und dem Punkte *M*. Sie falle aber zuerst zwischen *E* und *A*, wie die Linie *GN*: so ist klar, dass die durch *G* gehenden Linien auf fünf verschiedene Arten gezogen werden können.

Cas. I. Fig. 41. *Analysis. Es werde also nach der ersten Art die gerade Linie* HGK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Durch den Punkt* N *ziehe eine Linie der* MF *parallel, und verlängere* HK *bis zum Punkte* P. *Weil der Punkt* F *gegeben ist, so ist die Linie* NFG *der Lage nach gegeben; es wird aber auch* AB *der Lage nach gegeben, also ist der Punkt* N *bekannt; mithin ist auch die Linie* TNP, *welche der* CD *parallel ist, der Lage nach gegeben. Weil das Verhältniss* NG : GF *bekannt ist, so ist es auch das Verhältniss* NP : FK. *Es wird aber das Verhältniss* EH : FK *gegeben, folglich ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* AB, NP

der Lage nach gegeben; in NP *wird der Punkt* N, *in* AB *aber der Punkt* E *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* PNB *und die Parallele fällt jenseit des Punktes* E *). *Es ist daher eine gerade Linie* HGP *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* NP : EH *abschneide. Diese Linie* GP *ist aber der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 6, I, *woselbst keine Determination statt findet.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *(Nimm* m : p = FG : GN *und ziehe nach Buch* I *Fall* 6, I *die Linie* HGP, *welche das Verhältniss* NP : EH *gleich* p : n *abschneide.)* **) *Ich behaupte, dass die Linie* HP *der Aufgabe genüge. Denn weil* FG : GN, *oder* FK : NP = m : p *und* NP : EH = p : n, *so ist aus dem Gleichen* FK : EH = m : n; *mithin löst die Linie* HGP *das Problem.*

Cas. II. Fig. 42. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Durch den Punkt* N *ziehe der* CD *eine Linie parallel, wie* UNP. *Da die beiden Punkte* G, F *gegeben sind, so ist die Linie* GFN *der Lage nach gegeben; und da* AB *der Lage nach gegeben wird, so ist auch der Punkt* N *bekannt. Daher ist auch die Linie* UNP, *welche durch den gegebenen Punkt* N *der gegebenen* CD *parallel geht, der Lage nach gegeben. Ziehe auch durch den Punkt* G *die Linie* GO *der* CD *parallel, so ist der Punkt* O *bekannt.* ***) *Weil nun die Punkte* G, F, N *gegeben werden, so ist das Verhältniss* NG : GF *gegeben; also auch das Verhältniss* NP : FK. *Es ist aber das Verhältniss* FK : EH *ge-*

*) *d. h.* E *liegt zwischen* NP *und der mit* NP *parallelen* GO.

**) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

***) *Hier folgen noch die Worte:* Denique ducatur recta GK.

geben, folglich wird das Verhältniss NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* UP, AB *der Lage nach gegeben; in* UP *wird der Punkt* N *und in* AB *der Punkt* E *genommen; und die Parallele* GO *fällt jenseit des Punktes* E. *Es ist daher nach Fall* 6, II *des ersten Buches die Linie* GP *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* NP : EH *abschneide; mithin ist die Linie* GP *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber die mittlere Proportionale zwischen ON *und* NE *grösser oder nicht grösser als* NM *seyn kann, so sey sie zuerst nicht grösser als* NM. *Verbinde* GM, *so behaupte ich, dass* GM *ein grösseres Verhältniss* EM : MF *abschneide als jede andere Linie, welche aus* G *nach* CM *gezogen werden kann. Verlängere die Linie* GM *bis zum Punkte* J. *Weil nun die mittlere Proportionale zwischen* ON, NE *nicht grösser als* NM *ist, so kann sie entweder gleich* NM *seyn oder kleiner. Ist sie gleich* NM, *so wird, — weil zwei gerade Linien* UP, AB *der Lage nach gegeben sind; in* UP *der Punkt* N, *in* AB *aber der Punkt* E *genommen wird; und die Parallele* GO *jenseit des Punktes* E *fällt — die nach* J *verlängerte Linie* GM *(nach Fall* 6, II*) ein kleineres Verhältniss* NJ : EM *abschneiden als jede andere so gezogene Linie. Wenn aber die mittlere Proportionale zwischen* ON, NE *kleiner ist als* NM, *so wird die Linie* GM *der das kleinste Verhältniss abschneidenden näher seyn als jede beliebige Linie* GP. *Daher ist* NJ : EM < NP : EH *und* perm. NJ : NP, *das ist* FM : FK < EM : EH, *und nochmals* perm. FM : ME < FK : EH, *also* invert. EM : MF > EH : FK. *Hieraus geht hervor, dass die Linie* GM *ein grösseres Verhältniss* EM : MF *abschneide als jede aus* G *nach* MC *gezogene Linie.*

Wenn aber die mittlere Proportionale zwischen ON, NE *grösser ist als* NM, *so sey sie die Linie* NH.

Verbinde GH *und verlängere sie; ziehe auch* GM. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *ein Verhältniss* EH : FK *abschneide, welches grösser ist als jedes andere, das durch Linien aus* G *nach* MC *abgeschnitten werden kann. Verlängere* GM, GK *nach* J, P *und zu beiden Seiten der* GP *ziehe die Linien* GR, GW *und verlängere sie nach* S, Z. *Es werden also zwei gerade Linien* UP, AB *der Lage nach gegeben; in* UP *wird der Punkt* N *und in* AB *der Punkt* E *genommen; die Linie* GO, *welche durch den gegebenen Punkt* G *der* UP *parallel gezogen wird, fällt jenseit des Punktes* E, *und* NH *ist die mittlere Proportionale zwischen* ON *und* NE. *Folglich wird (nach Fall* 6, II*) die Linie* GHP *das kleinste Verhältniss* NP : EH *abschneiden. Wird also eine andere Linie, wie* GS, *gezogen, so ist das Verhältniss* NP : EH *kleiner als* NS : EQ *und* perm. PN : NS < EH : EQ. *Es ist aber* PN : NS = KF : FR, *folglich ist* KF : FR < EH : EQ *und* perm. FK : EH < FR : EQ, *also* invert. EH : FK > EQ : FR. *Die Linie* GK *schneidet daher ein grösseres Verhältniss als jede Linie* GR *ab; nämlich das Verhältniss* EH : FK, *welches grösser ist als jedes Verhältniss, das durch eine beliebige Linie aus* G *nach* MC *abgeschnitten werden kann. Ich behaupte ausserdem, dass die Linie* GM *ein kleineres Verhältniss* EM : MF *bestimme als jede andere aus* G *nach* KM *gehende Linie. Denn weil (nach Fall* 6, II*) die Linie* GP *das kleinste Verhältniss* NP : EH *abschneidet und die der* GP *näheren geraden Linien immer kleinere Verhältnisse bestimmen als die von ihr entfernteren: so ist* NZ : EV < NJ : EM *und* perm. NZ : NJ < EV : EM. *Nun ist* NZ : NJ = FW : FM, *also ist* FW : FM < EV : EM *und* perm. FW : EV < FM : ME, *mithin* invert. EV : FW > EM : MF. *Die Linie* GM *schneidet also ein kleineres Verhältniss ab als* GW; *woraus hervorgeht, dass die Linie* GM *ein kleineres*

rhältniss EM : MF *bestimme als jede aus* G *nach* I *gezogene gerade Linie.*

Synthesis. Die mittlere Proportionale zwischen N, NE *sey zuerst nicht grösser als* NM. *Verbinde* I, *so schneidet diese Linie ein grösseres Verhältniss* I : MF *ab als jede aus* G *nach* MC *mögliche Linie. us zur Construction gegebene Verhältniss ist aber weder gleich* EM : MF, *oder grösser, oder kleiner. : es gleich demselben, so wird* GM *allein die Aufbe lösen. Ist es grösser, so ist die Auflösung nicht glich, weil das gegebene Verhältniss grösser als s grösste ist. Wenn aber das Verhältniss kleiner , so wird nur auf eine Weise constrüirt werden. : sey also das gegebene Verhältniss* m : n < EM : MF. *ache* p : n = NG : GF *und verlängere* GM *nach* J. **) 'eil also* NG : GF = p : n *und* NG : GF = NJ : FM, *ist auch*

p : n = NJ : FM.

r *ist aber* . . . . . n : m > FM : ME,

lglich ist aus dem Gleichen p : m > NJ : EM. *Da n (nach Fall* 6, II*) das Verhältniss* NJ : EM *entder das kleinste ist, oder kleiner als jedes Verhältrs, das eine beliebige nach* JP *gehende Linie abhneiden kann, das Verhältniss* p : m *aber grösser r dasselbe ist: so lassen sich zwei gerade Linien beiden Seiten der* GM *ziehen, welche Verhältnisse ich* p : m *abschneiden. Von diesen wird jedoch die ie das Problem nicht lösen, diejenige nämlich, welche e* MF *trifft; die andere aber, welche der* MC *begnet, wird der Aufgabe genügen. Wird also die*

---

*) *Im Lat. folgt hier noch:* Jam constat, ex determinatione Casus secundi Loci sexti, quod ratio *NJ* ad *EM* vel minima est; vel propior erit rationi minimae, quam ratio quaevis alia a recta ipsi *PJ* occurrente abscissa. *Dieser Satz ist überflüssig, weil er bald nachher wiederkehrt.*

Linie GP *so gezogen, dass sie das Verhältniss* NP : EH = p : m *abschneidet: so behaupte ich, dass sie die Aufgabe löse oder dass* EH : FK = m : n *sey. Denn weil* NG : GF = p : n *und* NG : GF = NP : FK, *so ist auch*

NP : FK = p : n

Nun ist aber . . . . . EH : NP = m : p,

folglich ist aus dem Gleichen EH : FK = m : n, *mithin löst* GKP *die Aufgabe und zwar allein.*

Wenn aber die mittlere Proportionale zwischen ON, NE *grösser ist als* NM*: so sey sie gleich* NH. *Verbinde* GH, GM *und verlängere sie nach den Punkten* P, J*: so wird die Linie* GP *ein Verhältniss* EH : FK *abschneiden grösser als jedes Verhältniss durch eine andere Linie, welche aus* G *nach* EB, FC *gezogen werden kann; die Linie* GM *aber das Verhältniss* EM : MF, *welches kleiner ist als jedes andere durch eine Linie aus* G *nach* MK. *Das gegebene Verhältniss aber wird entweder gleich seyn dem Verhältnisse* EH : FK, *oder grösser, oder kleiner; (und im letztern Falle)* *) *wird es entweder grösser als* EM : MF, *oder eben so gross, oder kleiner seyn. Ist nun das Verhältniss gleich* EH : FK, *so genügt die Linie* GHP *allein der Aufgabe; und ist es grösser, so kann sie nicht gelöst werden. Ist es kleiner als* EH : FK, *aber grösser als* EM : MF, *so wird das Problem auf zweierlei Weise construirt werden, nämlich zu beiden Seiten der* GK. *(Ist es gleich dem Verhältnisse* EM : MF, *so leistet ausser der Linie* GM *noch eine zweite nach* KC *das Verlangte.)* *) *Wenn es aber kleiner als* EM : MF *ist, so wird nur auf eine Weise construirt werden, nämlich jenseit des Punktes* K. **)

Cas. III. Fig. 43. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* GK *gezogen, welche*

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

**) *d. h. durch eine Linie nach* KC.

das gegebene Verhältniss EH : FK *abschneide. Es ist aber das Verhältniss* FK : NP *gegeben, also auch das Verhältniss* NP : EH. *Folglich ist die Linie* GK *vermittelst Fall* 6, II *des ersten Buches der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil die mittlere Proportionale zwischen ON, NE *kleiner oder nicht kleiner als* NM *seyn kann: so sey sie zuerst nicht kleiner als* NM. *Verbinde* GM *und verlängere sie nach* J, *so erhellet aus den früheren Beweisen, dass die Linie* GM *ein Verhältniss* EM : MF *abschneide, welches grösser ist als jedes Verhältniss, das beliebige aus* G *nach* EM *gezogene Linien abschneiden können.*

Wenn aber die mittlere Proportionallinie zwischen ON *und* NE *kleiner ist als* NM, *so sey sie* NH. *Verbinde* GM, GH *und verlängere sie nach* J, P: *so ist aus den vorhergehenden Gränzbestimmungen klar, dass die Linie* GH *unter allen aus* G *nach* EM *möglichen Linien das grösste Verhältniss* EH : FK, *die Linie* GM *aber ein kleineres Verhältniss* EM : MF *abschneide als jede andere Linie, welche aus* G *nach* HM *gezogen werden kann.*

Synthesis. Es werde die mittlere Proportionale zwischen ON *und* NE *genommen. Diese wird entweder kleiner seyn als* NM, *oder nicht kleiner. Sie sey nun zuerst nicht kleiner als* NM. *Verbinde* GM *und verlängere sie nach* J, *so wird die Linie* GMJ *ein Verhältniss* EM : MF *abschneiden, grösser als jedes Verhältniss durch irgend eine Linie aus* G *nach* EM. *Wenn also zur Construction ein Verhältniss gegeben wird, welches gleich* EM : MF *ist, so genügt offenbar* GM *allein der Aufgabe. Ist das gegebene Verhältniss grösser, so kann nicht construirt werden. Ist es aber kleiner, so erhellet aus den früheren Compositionen, dass die Auflösung nur auf eine Weise geschehen könne, nämlich durch eine Linie, welche* EM *trifft.*

Wenn aber die mittlere Proportionale zwischen ON, NE *kleiner ist als* NM, *wie* NH: *so verbinde* GM, GH *und verlängere sie nach* J *und* P. *Alsdann schneidet die Linie* GP *ein grösseres Verhältniss ab als alle beliebige Linien, welche aus dem Punkte* G *ausgehend die ganze* EM *treffen* *); *die Linie* GM *dagegen bestimmt das Verhältniss* EM : MF, *welches kleiner ist als jedes Verhältniss, welches beliebige nach* HM *allein gehende Linien abschneiden. Es ist also klar, dass, wird zur Construction ein Verhältniss gleich* EH : FK *gegeben, die Linie* GH *die Aufgabe löse und dass keine Auflösung statt finden könne, wenn es grösser ist. Wenn aber das gegebene Verhältniss kleiner ist als* EH : FK, *jedoch grösser als* EM : MF, *so geht aus den eben vorgetragenen Determinationen hervor, dass das Problem auf zweierlei Weise gelöst werden könne, zu beiden Seiten der* GP, *durch Linien, welche* EH, HM *treffen. Ist aber das Verhältniss kleiner als* EM : MF, *so erhellet aus denselben Gränzbestimmungen, dass nur eine Linie, welche* EH *trifft, der Aufgabe genüge. Endlich wenn das gegebene Verhältniss gleich ist* EM : MF, *so folgt aus denselben Gründen, dass auf zweierlei Weise construirt werden könne und dass sowohl* GM *das Verlangte leiste als auch eine andere Linie, welche die* EH *trifft.*

Cas. IV. Fig. 44. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GKH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Verlängere sie bis zum Punkte* P, *so ist wegen des gegebenen Verhältnisses* FK : NP *auch das Verhältniss* NP : EH *bekannt, also die Linie* GKH *der Lage nach gegeben, vermittelst Fall* 6. III, *woselbst keine Gränze statt findet. Die Construction aber ist einleuchtend.*

---

*) *Im Lat. folgt hier noch:* vel quam rectae quae soli rectae *HM* occurrunt.

Cas. V. Fig. 45. *Analysis. Es werde jetzt ach der fünften Art die Linie* GKH *gezogen, welie das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist ach das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* KH *der Lage nach gegeben. Die Aufgabe kommt ämlich auf Fall* 6, IV *zurück.*

Determination. Es sey NH *die mittlere Proortionale zwischen* ON, NE. *Verbinde* GH; *ich beauptе, dass diese Linie* GKH *ein Verhältniss* FK : EH *bschneide grösser als jedes beliebige Verhältniss, welches irgend eine aus* G *nach* NA *gezogene Linie abhneiden kann. Denn ziehe eine andere Linie, wie* Q. *Weil* NH *die mittlere Proportionale zwischen* N, NE *ist, so ist* NP : EH > NS : EQ *und* perm. P : NS > EH : EQ. *Es ist aber* NP : NS = FK : FR, *olglich ist* FK : FR > EH : EQ *und* perm. FK : EH > R : EQ. *Die Linie* GKH *schneidet also ein grösseres Verhältniss* FK : EH *ab als jede andere aus* G *ach* NA *gehende Linie.*

Synthesis. Es sey NH *die mittlere Proporonale zwischen* ON, NE. *Verbinde* GH, *so wird die Linie* GH *das Verhältniss* FK : EH *abschneiden rösser als jedes andere Verhältniss, welches eine beliebige aus* G *nach* NA *gezogene Linie abschneiden nn. Wenn daher das zur Construction gegebene erhältniss gleich ist* FK : EH, *so wird die Linie* KH *allein das Problem lösen. Ist das gegebene erhältniss grösser, so kann die Aufgabe nicht gelöst werden. Wenn es aber kleiner ist, so erhellet s dem frühern Vortrage, dass sich zwei lösende inien ziehen lassen, nämlich nach* AH, HN.

Fall 5.

Es falle nun die Linie *GN*, welche aus dem Punkte durch den Punkt *F* gezogen ist, diesseit des Punk-

tes *E*, oder zwischen denselben und den Punkt *M*: so ist klar, dass durch den Punkt *G* Linien auf fünf Arten gezogen werden können.

Cas. I. II. Fig. 46. 47. *Analysis. Es werden nun zuerst nach der ersten und zweiten Art die Linien* GH *gezogen, welche die gegebenen Verhältnisse* FK : EH *abschneiden. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so wird auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben seyn. Es werden also zwei gerade Linien* NP, MH *der Lage nach gegeben; in jener wird der Punkt* N, *in dieser aber der Punkt* E *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* PNM. *Es sind daher nach der ersten und zweiten Art des vierten Falles gerade Linien* GH *zu ziehen, welche die gegebenen Verhältnisse* NP : EH *abschneiden; mithin sind die Linien* GH *der Lage nach gegeben durch die in jenen Arten gelehrten Constructionen, welche keine Gränzen haben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *und es werde* m : p = FG : GN *genommen. Es werden nun zwei gerade Linien* NP, EM *der Lage nach gegeben; in* NP *wird der Punkt* N, *in der andern* MH *aber der Punkt* E *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* MNP. *Zieht man also nach der ersten und zweiten Art des vierten Falles die geraden Linien* GH, *welche die Verhältnisse* NP : EH = p : n *abschneiden, so ist offenbar, dass sie der Aufgabe genügen werden.* *)

Cas. III. Fig. 48. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängert*

*) *Im Lat. lautet dieser Satz:* Rectae igitur *GH*, ductae juxta Casus primum et secundum Loci quarti, auferent rationes *NP* ad *EH* aequales rationi *p* ad *n*; unde patet rectam *GH* satisfacere problemati.

sie bis zum Punkte P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* GHP *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 4, III.

Determination. *Verbinde* GM *und verlängere sie nach* J: *ich behaupte, dass die Linie* GJ *ein grösseres Verhältniss* FM : ME *abschneide als jede beliebige aus* G *nach* FM *gehende Linie. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GP. *Da die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren: so ist* NP : EH $\leqslant$ NJ : EM, *mithin* perm. *(und* invert.*)* *) NJ : NP $\geqslant$ EM : EH. *Es ist aber* NJ : NP = FM : FK, *also* FM : FK $\geqslant$ EM : EH *und* perm. FM : ME $>$ FK : EH. *Folglich schneidet die Linie* GJ *ein Verhältniss* FM : ME *als grösser als jedes Verhältniss, das durch eine beliebige aus* G *nach* MN *gezogene Linie abgeschnitten werden kann.*

Synthesis. *Verbinde* GM *und verlängere sie nach* J: *so bestimmt diese Linie* GJ *ein grösseres Verhältniss* FM : ME *als jede andere aus* G *nach* MN *mögliche Linie. Wenn also das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* FM : ME *ist, so wird* GJ *allein die Aufgabe lösen. Ist das gegebene Verhältniss grösser, so ist die Auflösung nicht möglich. Wenn es aber kleiner ist, so erhellet aus den vorhergehenden Determinationen, dass das Problem nur auf eine Weise gelöst werden könne, nämlich durch eine Linie, welche* NM *trifft.*

Cas. IV. Fig. 49. *Analysis.* *Es werde nach der vierten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide; verlängere*

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat. Der Schluss* invertendo *konnte aber vermieden werden durch Umstellung der vorhergehenden Verhältnisse.*

sie bis zum Punkte P. *Weil das Verhältniss* FK:NP *bekannt ist, so wird auch das Verhältniss* NP:EH *und somit die Linie* GP *der Lage nach gegeben seyn, indem die Aufgabe wie die vorhergehende auf Fall* 4, III *zurückkommt.*

Determination. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J: *ich behaupte, dass die Linie* GJ *ein Verhältniss* FM:ME *abschneide kleiner als jedes andere, welches durch irgend eine aus* G *nach* MC *gehende Linie abgeschnitten werden kann. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GP. *Weil die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse bestimmen als die von ihm entfernteren, so ist* NJ:EM $<$ NP:EH *und* perm. NJ:NP $<$ EM:EH. *Es ist aber* NJ:NP $=$ FM:FK; *folglich ist* FM:FK $<$ EM:EH *und* perm. FM:ME $<$ FK:EH. *Daher schneidet* GM *ein kleineres Verhältniss* FM:ME *ab als jede beliebige Linie, welche aus* G *nach* MC *gezogen werden kann.*

Synthesis. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J: *so wird* GJ *das Verhältniss* FM:ME *abschneiden, welches kleiner ist als jedes andere durch eine Linie aus* G *nach* MC. *Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* FM:ME, *so genügt* GJ *allein der Aufgabe. Ist es kleiner, so ist die Auflösung nicht möglich. Ist es aber grösser, so ist im Vorhergehenden gezeigt worden, dass nur eine Linie, welche* MC *trifft, das Verlangte leiste.*

Cas. V. Fig. 50. *Analysis. Es werde nach der fünften Art die Linie* HK *gezogen, welche von* EH, FK *das gegebene Verhältniss* FK:EH *abschneide; verlängere sie bis zum Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK:NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP:EH *und somit die Linie* PH *der Lage nach gegeben vermittelst der Auflösung in Fall* 4, IV, *welche keine Gränzen hat. Die Construction aber ist einleuchtend.*

Fall 6.

Es gehe jetzt die Linie, welche durch die Punkte *G*, *F* gezogen ist, durch den in der andern Linie genommenen Punkt *E*, wie *GFE*: so ist klar, dass aus dem Punkte *G* Linien auf vier Arten gezogen werden können.

Cas. I. Fig. 51. *Analysis. Es werde nun die Linie* GP *nach der ersten Art gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide* *); *ziehe* EP *parallel mit* CD. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so wird auch gegeben seyn das Verhältniss* EP : EH; *folglich ist die Linie* PH *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 3, I *im ersten Buche.*

Determination. Das gegebene Verhältniss muss aber kleiner seyn als FL : EO. *Ziehe nämlich eine Linie* GO *der* MFL *parallel, und verlängere die Linien* GL, EP *bis* N. *Weil nun* NE : EP > NP : PE *und* NE : EP = LF : FK, *so wie* NP : PE = GN : EH, *und die Linie* GN = EO *ist, so ist* LF : FK > EO : EH *und* perm. FL : EO > FK : EH. *Es muss also das zur Construction gegebene Verhältniss kleiner als* FL : EO *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *kleiner als* FL : EO. *Nimm* m : p = FG : GE. *Da nun* FG : GE = FL : LM, *so ist auch* FL : LM = m : p. *Es ist aber* LM = GO, *daher ist* FL : GO = m : p *und* invert.

p : m = GO : FL

Nun ist . . . . . m : n < FL : EO,

folglich ist aus dem Gleichen p : n < GO : OE.

Macht man also GO : OH = p : n, *so ist* OH > OE.

*) *Im Lat. folgt hier noch:* ac producatur ea ad *H*; *dagegen fehlen die Worte: ziehe* EP *parallel mit* CD.

Verbinde GH, *so behaupte ich, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse. Denn es ist* m : p = FG : GE *und* FG : GE = FK : EP, *mithin*

FK : EP = m : p.

Nun ist GO : OH, *das ist* . . PE : EH = p : n, *folglich ist aus dem Gleichen* FK : EH = m : n. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe.*

Cas. II. Fig. 52. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere sie bis zum Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* EP : EH, *mithin die Linie* GP *der Lage nach gegeben; die Aufgabe kommt nämlich auf Fall* 3, II *zurück.*

Determination. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J: *ich behaupte, dass die Linie* GM *das Verhältniss* FM : ME *abschneide grösser als jedes Verhältniss, welches beliebige aus* G *nach* EM *gezogene Linien abschneiden. Denn zieht man eine Linie* GP, *so ist, weil die dem Punkte* E *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren, offenbar das Verhältniss* JE : EM *grösser als* PE : EH *und* perm. JE : EP *grösser als* ME : EH. *Nun ist* JE : EP = MF : FK, *mithin ist* MF : FK *grösser als* ME : EH *und* perm. FM : ME *grösser als* FK : EH. *Die Linie* GM *schneidet also ein grösseres Verhältniss* FM : ME *ab als jede andere aus* G *nach* EM *gezogene Linie.*

Synthesis. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J. *Diese Linie* GM *wird ein † grösseres Verhältniss* FM : ME *bestimmen als jede beliebige aus* G *nach* EM *gezogene Linie. Wenn also das gegebene Verhältniss gleich ist dem Verhältnisse* FM : ME, *so löst die Linie* GM *allein die Aufgabe. Ist das gegebene Verhältniss grösser, so kann nicht construirt werden. Ist es aber kleiner, so lässt sich offenbar*

nach Fall 3, II *aus* G *nach* EM *eine Linie ziehen, welche das Verlangte leistet.*

Cas. III. Fig. 53. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide; verlängere sie nach* P. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* HE : EP *) und somit die Linie* GP *der Lage nach gegeben. Die Aufgabe kommt nämlich wie die vorige auf Fall* 3, II *zurück.*

Determination. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J. *Weil die dem Punkte* E *näheren geraden Linien immer* † *kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren: so wird (nach den vorhin bewiesenen Gränzbestimmungen) die Linie* GM *ein kleineres Verhältniss* FM : ME *abschneiden als jede andere Linie, welche aus* G *nach* MH *gezogen werden kann.*

Synthesis. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J. *Diese Linie* GM *wird ein kleineres Verhältniss* FM : ME *abschneiden als jede andere aus* G *nach* MH *gezogene Linie. Wenn also zur Construction ein Verhältniss gegeben wird, welches gleich ist* FM : ME, *so genügt* GM *allein der Aufgabe. Ist es kleiner, so wird nicht construirt werden. Wenn es aber* † *grösser ist, so erhellet aus den vorhergehenden Begränzungen, dass sich nach* MH *eine lösende Linie ziehen lasse.*

Cas. IV. Fig. 54. *Analysis. Es werde nach der vierten Art die Linie* HGK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere sie nach* P. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so ist es auch das Verhältniss* EP : EH. *Es*

---

*) *Diess Verhältniss ist umzukehren.*

†) In Cas. II et III ubique fere contrarium habet *MS.* Codex, manifesta menda. Halley.

werden also zwei gerade Linien EH, EP *der Lage nach gegeben; in jeder derselben wird der Punkt* E *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* HEP. *Es ist daher nach Fall* 3, III *die Linie* HP *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* EP : EH *abschneide. Folglich ist die Linie* HP *der Lage nach gegeben (vermittelst der in jener Stelle vorgetragenen Construction) und hat keine Gränzen.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *und es werde* m : p = FG : GE *gemacht. Es sind also zwei gerade Linien* EH, EP, *welche einander in* E *schneiden, der Lage nach gegeben, und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* HEP. *Es werde also (nach Fall* 3, III*) die Linie* HP *gezogen, welche das Verhältniss* EP : EH *gleich* p : n *abschneide: so ist klar, dass die Linie* HP *der Aufgabe genüge.*

Fall 7.

Es liege nun der gegebene Punkt *G* im W. *DMA*, Man ziehe durch den Punkt *G* mit den gegebenen Linien *AM*, *MD* zwei Parallelen wie *EG*, *GF*, welche denselben in den Punkten *E*, *F* begegnen. Alsdann ist klar, dass sich aus *G* Linien auf drei Arten ziehen lassen.

Cas. I. Fig. 55. *Analysis. Es werde nun zuerst eine Linie* HK *nach der ersten Art gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil* FK : EH = □ FK . EH : EH², *so ist das Verhältniss* □ FK . EH : EH² *gegeben. Es ist aber* □ FK . EH *gegeben, weil es gleich* □ FGE *ist* *); *folglich ist die Linie* EH *bekannt. Da nun der Punkt* E *gegeben ist, so ist es auch der Punkt* H; *mithin ist wegen des gegebenen Punktes* G *die Linie* HK *der Lage nach gegeben.*

*) *Aus den gleichwinkligen* △△ KFG, GEH *nämlich folgt* KF : FG = GE : EH, *also* □ FK . EH = □ FGE *(oder* = □ EMF*).*

Synthesis. *Es sey* m:n *das gegebene Verhältniss.* *Mache* □ FGE : EH² = m : n, *verbinde* GH *und erlängere sie nach* K; *ich behaupte, dass die Linie* HK *dem Probleme genüge.* *Denn weil* □ FGE : EH² = m : n *und* □ FK . EH = □ FGE *ist, so ist* □ FK . EH : EH² = m : n, *also auch* FK : EH = m : n. *Die Linie* HK *ist also die Aufgabe.*

Cas. II, Fig. 56. *Analysis.* *Es werde nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide.* *Weil das Verhältniss* EH : FK *gegeben wird, so ist das Verhältniss* □ EH . FK : FK² *gegeben.* *Es ist aber* □ EH . FK = □ EMF, *mithin ist das Verhältniss* □ EMF : FK² *bekannt.* *Nun wird* □ EMF *gegeben wegen seiner bekannten Seiten; es ist also* FK² *und daher die Linie* FK *der Grösse und Lage nach gegeben.* *Wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* K *und somit die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. *Weil aber* ME > EH *und* MF < FK, *so ist* ME : EH > MF : FK *und* perm. EM : MF > EH : FK. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss; daher muss das gegebene Verhältniss kleiner als* EM : MF *seyn.*

Synthesis. *Das gegebene Verhältniss* m : n *sey kleiner als* EM : MF. *Weil also* EM : MF > m : n, *so wird* □ EMF : MF² > m : n *seyn.* *Es sey daher* □ EMF : FK² = m : n, *so ist* FK > MF. *Ich behaupte nun, dass die Linie* GK *die Aufgabe löse oder dass* EH : FK = m : n *sey.* *Denn es ist* m : n = □ EMF : FK². *Es ist aber* □ EMF = □ EH . FK. *Folglich ist* m : n = □ EH . FK : FK² *das ist* = EH : FK. *Die Linie* GK *löst also die Aufgabe; ich behaupte auch, sie allein.* *Denn wenn eine andere Linie wie* GR *gezogen wird, so ist klar, dass jene dem Probleme genüge, diese aber nicht.*

Cas. III. Fig. 57. *Analysis. Es werde nun die Linie* GKH *nach der dritten Art gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* EH : FK *gegeben ist, so wird auch das Verhältniss* □EH . FK : FK² *gegeben seyn. Nun ist* □EH . FK = □EMF, *mithin ist das Verhältniss* □EMF : FK² *bekannt. Das* □EMF *ist aber gegeben wegen der bekannten Linien* EM, MF; *folglich ist* FK² *gegeben und die Linie* FK *der Grösse und Lage nach. Wegen des gegebenen Punktes* F *ist also der Punkt* K *bekannt, folglich die Linie* GKH *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber EH > EM *und* KF < FM, *so ist* EH : EM > KF : FM *und* perm. EH : FK > EM : MF. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss. Folglich muss das zur Construction gegebene Verhältniss grösser als* EM : MF *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n *sey grösser als das Verhältniss* EM : MF *oder als das Verhältniss des* □EMF *zum Quadrate von* FM. *Mache also* □EMF : FK² = m : n, *so wird* FK < FM *seyn. Verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse oder dass* EH : FK = m : n *sey. Denn weil* □EMF : FK² = m : n *und* □EMF = □EH . FK, *so ist* □EH . FK : FK² *das ist* EH : FK = m : n. *Die Linie* GH *löst also die Aufgabe und zwar allein. Denn wird eine andere Linie gezogen, so genügt zwar jene der Aufgabe, nicht aber diese.*

Fall 8.

Es gehe nun die durch *G* mit *FM* parallel gezogene Linie durch den Punkt *E*; die Linie aber, welche der andern *MA* parallel gezogen ist, falle diesseit des Punktes *F*, wie *GL*. Dann können aus *G* Linien auf vier Arten gezogen werden.

Cas. I. Fig. 58. *Analysis. Es werde aber zuerst die Linie* HGK *nach der ersten Art gezogen, welche das Verhältniss* EH : FK *gleich dem gegebenen abschneide. Weil* EH : FK = □ EH . KL : □ FKL, *so ist das Verhältniss* □ EH . KL : □ FKL *gegeben. Es ist aber* □ EH . KL = □ GEM *oder* GE . GL; *folglich ist das* □ FKL *gegeben, welches an der gegebenen* LF *so zu entwerfen ist, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Daher ist die Linie* FK *gegeben so wie der Punkt* K. *Wegen des gegebenen Punktes* G *ist also die Linie* KGH *der Lage nach gegeben.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Nimm* □ EGL : □ Z = m : n *und entwirf an* LF *ein Rechteck gleich* □ Z, *dessen Überschuss ein Quadrat sey. Es sey diess das* □ LKF. *Verbinde* KG *und verlängere sie nach* H; *ich behaupte, dass die Linie* HK *die Aufgabe löse. Denn weil* m : n = □ EGL : □ Z *und* □ Z = □ FKL *so wie* □ EGL = □ EH . KL, *so ist* □ EH . KL : □ FKL, *das ist* EH : FK = m : n. *Folglich löst die Linie* HK *die Aufgabe.*

Cas. II. Fig. 59. *Analysis. Es werde jetzt die Linie* HK *nach der zweiten Art gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Wegen des gegebenen Verhältnisses* EH : FK *ist auch das Verhältniss* □ EH . KL : □ FKL *gegeben. Nun ist aber* □ EH . KL *gegeben, weil es gleich* □ EGL *ist; folglich ist* □ FKL *gegeben. Entwirft man also jenes Rechteck an* LF *so dass die Ergänzung ein Quadrat sey: so erhält man die Linie* LK. *Wegen der gegebenen Punkte* K, G *ist also die Linie* KH *der Lage nach gegeben.*

Determination. Weil aber zur Construction erforderlich ist, dass das Verhältniss des □ EGL *zu einem andern gleich dem gegebenen gemacht und an der Linie* LF *ein dem letztern gleiches Rechteck entworfen werde, dessen Ergänzung ein Quadrat sey;*

so wird diese Entwerfung nicht immer möglich seyn, wenn nämlich jenes Rechteck grösser ist als das Quadrat der halben LF. *Es wird sich daher auch nicht jedes beliebige Verhältniss von den gegebenen Linien abschneiden lassen* *). *Das Glänzverhältniss aber wird so gefunden.*

Halbire LF *in* K, *verbinde* KG *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* HK *ein kleineres Verhältniss* EH : FK *abschneide als jede andere Linie, welche aus* G *nach* LF *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere Linie, wie* QR. *Weil* LK = KF, *so ist* □ LKF > □ LRF. *Es ist aber* □ EH . LK = □ EQ . LR, *weil jedes derselben gleich* □ EGL *ist. Daher ist* □ EH . KL : □ LKF < □ EQ . LR : □ LRF. *Nun ist*

□ EH . LK : □ LKF = EH : FK

und □ EQ . LR : □ LRF = EQ : FR,

folglich ist EH : FK < EQ : FR. *Die Linie* HK *schneidet also ein kleineres Verhältniss* EH : FK *ab als jede andere aus* G *nach* LF *gezogene Linie.*

Synthesis. Halbire LF *in* K, *verbinde* KG *und verlängere sie nach* H: *so schneidet die Linie* HK *das Verhältniss* EH : FK *ab kleiner als jedes andere Verhältniss, welches durch irgend eine Linie aus* G *nach* LF *abgeschnitten werden kann. Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* EH : FK, *so löst* HK *allein die Aufgabe. Ist es klei-*

*) *Das Lat. lautet so:* Quoniam autem requiritur, ut fiat, in ratione ad componendum proposita, rectangulum *EG* in *GL* ad rectangulum aliud; et ut applicetur ad rectam *LF* rectangulum aequale huic rectangulo deficiens quadrato: fieri non potest ut applicetur ad quamvis rectam datam rectangulum datum deficiens quadrato. Impossibile est igitur producere rectam lineam ad punctum *H*, quae auferat a quibuslibet duabus rectis segmenta quae sint inter se in ratione data.

ner, so kann nicht construirt werden. Ist aber das gegebene Verhältniss grösser als EH : FK *wie* m : n, *so nimm* □ EGL (= □ EH . LK) : □ Z = m : n. *Weil nun* m : n > EH : FK, *so ist* □ EH . LK : □ Z > EH : FK. *Es ist aber* EH : FK = □ EH . KL : □ FKL, *folglich* □ EH . LK : □ Z > □ EH . KL : □ FKL. *Daher ist* □ Z < □ FKL. *Es lässt sich also an* LF *ein dem* □ Z *gleiches Rechteck entwerfen, und zwar auf zweierlei Weise. Die Entwerfungspunkte seyen* R *und* W; *verbinde* GR, GW *und verlängere sie nach* Q *und* V: *ich behaupte, dass beide Linien* QR, VW *die Aufgabe lösen. Denn weil* □ EGL : □ Z = m : n *und* □ EGL = □ EV . LW *so wie* □ Z = □ LWF, *so ist* □ EV . LW : □ LWF *das ist* EV : FW = m : n. *Die Linie* VW *löst also die Aufgabe. Und eben so wird bewiesen, dass die Linie* QR *dasselbe leiste. Es ist also klar, dass das Problem auf zweierlei Weise gelöst werden könne.*

Cas. III. Fig. 60. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* □ EH . KL : □ FKL *und das* □ EH . KL *gegeben ist: so wird auch das Rechteck* FKL *gegeben seyn, welches an der* FL *so zu entwerfen ist, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Es ist daher die Linie* KL *und der Punkt* K *gegeben.*

Determination. Zur Construction ist aber nöthig, dass das gegebene Verhältniss kleiner als EM : MF *sey. Denn es ist* ME > EH *und* MF < FK; *daher ist* EM : EH > MF : FK *und* perm. EM : MF > EH : FK. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss; folglich ist zur Construction erforderlich, dass das gegebene Verhältniss kleiner sey als* EM : MF.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n *sey kleiner als* EM : MF. *Nimm* □ EGL (= □ EML) : □ Z = m : n. *Da nun* m : n < EM : MF, *so ist* □ EML : □ Z

$<$ EM : MF. *Es ist aber* EM : MF $=$ □ EML : □ FML, *folglich ist* □ Z $>$ □ FML. *Wird also an* FL *ein dem* □ Z *gleiches Rechteck entworfen, dessen Überschuss ein Quadrat ist, so liegt der Punkt* K *jenseit des Punktes* M. *Es sey daher* □ FKL $=$ □ Z, *verbinde* GK: *ich behaupte, dass die Linie* GK *die Aufgabe löse. Denn weil* m : n $=$ □ EGL : □ Z *und* □ Z $=$ □ FKL, *so ist* m : n $=$ □ EGL : □ FKL. *Nun ist* □ EGL $=$ □ EH . KL, *daher ist* m : n $=$ □ EH . KL : □ FKL. *Es ist aber* □ EH . KL : □ FKL $=$ EH : FK; *folglich ist* EH : FK $=$ m : n *und die Linie* GK *löst die Aufgabe.*

Cas. IV. Fig. 61. *Analysis. Es werde nach der vierten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* □ EH . KL : □ FKL *gegeben und* □ EH . KL $=$ □ EGL *ist: so ist auch* □ FKL *gegeben, an der bekannten* FL *so zu entwerfen, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Daher ist die Linie* KL, *also wegen des gegebenen Punktes* G *die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Das zur Construction gegebene Verhältniss muss aber grösser als EM : MF *seyn. Denn es ist* EH $>$ EM *und* FK $<$ FM; *daher ist* EH : EM $>$ FK : FM *und* perm. EH : FK $>$ EM : MF. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss; folglich muss dasselbe grösser als* EM : MF *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *grösser als* EM : MF. *Nimm* □ EGL ($=$ □ EML) : □ Z $=$ m : n. *Weil nun* m *zu* n $>$ EM : MF *und*

$$m : n = \square EML : \square Z,$$
$$EM : MF = \square EML : \square FML,$$

so ist □ EML : □ Z $>$ □ EML : □ FML, *mithin* □ Z $<$ □ FML. *Wird also an* FL *ein dem* □ Z *gleiches Rechteck entworfen, dessen Überschuss ein Quadrat ist, so wird der Entwerfungspunkt* K *diesseit des*

Punktes M *fallen. Es sey nun* □ FKL = □ Z, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H: *ich behaupte, dass die Linie* GH *die Aufgabe löse. Denn weil* □ EGL *das ist* □ EH . KL : □ FKL = m : n *und* □ EH . KL : □ FKL = EH : FK, *so ist* EH : FK = m : n.

Fall 9.

Es falle nun die andere der beiden Parallelen jenseit *) des Punktes *F*, wie die Linie *GL*: so ist klar, dass es vier Arten giebt, das ist dass sich aus dem Punkte *G* Linien auf vier Arten ziehen lassen.

Cas. I. Fig. 62. *Analysis. Es werde nach der ersten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das* □ EH . KL *gegeben ist, so ist auch das* □ FKL *gegeben, an der bekannten* FL *so zu entwerfen, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Daher ist die Linie* KL *und der Punkt* K *bekannt, folglich die Linie* HGK *der Lage nach gegeben. Die Construction des Problems aber erhellet aus dem Vorhergehenden.*

Cas. II. Fig. 63. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil das Verhältniss* □ EH . KL : □ FKL *und das* □ EH . KL *selbst gegeben ist: so ist auch das* □ FKL *gegeben an der bekannten Linie* FL *so zu entwerfen, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Folglich ist der Punkt* K *und, weil der Punkt* G *gegeben wird, die Linie* GK *der Lage nach gegeben.*

Determination. Das zur Construction gegebene Verhältniss aber muss kleiner als EM : MF *seyn. Denn weil* ME > EH *und* MF < FK: *so wird das Verhältniss* EM : EH *grösser seyn als*

*) extra, *besser* ultra.

das Verhältniss MF : FK; *mithin ist* perm. EH : FK < EM : MF.

Synthesis. *Das gegebene Verhältniss* m : n *sey kleiner als* EM : MF. *Nimm* □ EGL *oder* □ EML : □ Z = m : n. *Weil nun* m : n < EM : MF *und* EM : MF = □ EML : □ FML, *so ist*

□ EML : □ Z < □ EML : □ FML;

folglich ist das Rechteck Z *grösser als das Rechteck* FML. *Man entwerfe also an der Linie* FL *ein dem* □ Z *gleiches Rechteck, dessen Überschuss ein Quadrat sey; es sey das* □ FKL: *so wird der Punkt* K *jenseit des Punktes* M *fallen, und es ist klar, dass die Linie* GK *der Aufgabe genüge.*

Cas. III. Fig. 64. *Analysis.* *Es werde nach der dritten Art die Linie* GH *gezogen, abschneidend das Verhältniss* EH : FK, *welches gegeben wird. Weil das Verhältniss des Rechtecks* FKL *zum Rechtecke* EH . KL **) und das* □ EH . KL *selbst gegeben ist: so wird auch das* □ FKL *gegeben, an der* FL *so zu entwerfen, dass der Überschuss ein Quadrat sey. Daher ist der Punkt* K *und wegen des gegebenen Punktes* G *die Linie* GH *der Lage nach gegeben.*

Determination. *Es muss aber das zur Construction gegebene Verhältniss grösser seyn als* EM : MF. *Denn weil* HE : EM > KF : FM, *so ist* perm. EH : FK > EM : MF. *Es ist aber* EH : FK *das gegebene Verhältniss, mithin ist klar, dass das gegebene Verhältniss grösser seyn müsse als* EM : MF. *Aus dem Vorigen aber erhellet, wie die Construction gemacht werden könne.*

Cas. IV. Fig. 65. *Analysis.* *Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* EH : FK *abschneide. Weil*

*) *Diess Verhältniss muss umgekehrt werden.*

das Verhältniss □EH.KL : □FKL *und das* □EH.KL *gegeben ist: so ist auch* □FKL *gegeben. Entwirft man also dieses Rechteck an* FL *so, dass die Ergänzung ein Quadrat ist, so erhält man den Punkt* K; *und weil der Punkt* G *gegeben wird, so ist die Linie* HKG *der Lage nach gegeben.*

Determination. Halbire FL *im Punkte* K, *verbinde* GK *und verlängere sie nach* H. *Ich behaupte, dass die Linie* GH *ein kleineres Verhältniss* GH : FK *abschneide als jede andere Linie, welche aus* G *nach* FL *gezogen werden kann. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GRQ. *Weil* FK = KL, *so ist* □FKL > □FRL. *Es ist aber* □EH.KL = □EQ.RL *(weil jedes derselben gleich* □EGL *ist). Folglich ist*

□EH . KL : □FKL < □EQ . RL : □FRL.

Nun ist □EH . KL : □FKL = EH : FK

und □EQ . RL : □FRL = EQ : FR,

folglich ist EH : FK < EQ : FR. *Mithin schneidet die Linie* GH *ein kleineres Verhältniss* EH : FK *ab als jede andere Linie, welche aus* G *nach* FL *gezogen werden kann, und es findet demnach eine Gränze statt. Aus dem eben Vorgetragenen aber erhellet, dass (wenn das gegebene Verhältniss grösser als* EH : FK *ist)* *) *die Construction auf zweierlei Weise, zu beiden Seiten der* GH, *geschehen könne, nämlich durch Linien, welche* KF *und* KL *treffen.*

Fall 10.

Es fallen nun die beiden Linien, welche durch den Punkt *G* mit *HM*, *MK* parallel gezogen werden, jenseit der gegebenen Punkte *F* und *E*, wie die Linien *GL*, *GO*. Dann ist klar, dass aus dem Punkte *G* Linien auf fünf verschiedene Arten gezogen werden können.

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

Cas. I. Fig. 66. *Analysis. Es werde aber zuerst nach der ersten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verbinde* GF, *verlängere sie nach* N *und ziehe durch den Punkt* N *der* MK *die Linie* NP *parallel; verlängere auch die Linie* HGK *bis zum Punkte* P *in der Linie* NP, *welche der Lage nach gegeben ist. Weil nun das Verhältniss* FK : EH, *so wie* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* HN, NP *der Lage nach gegeben; in* HN *wird der Punkt* E, *in* NP *aber der Punkt* N *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* HNP *und die Parallele* GO *fällt jenseit des Punktes* E. *Es ist also nach der ersten Art des sechsten Falles eine gerade Linie zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* NP : EH *abschneide. Daher ist die Linie* HP *der Lage nach gegeben vermittelst der in jener Stelle gelehrten Construction, woselbst auch keine Gränze statt findet.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Mache* m : p = FG : GN *und ziehe nach Fall* 6, I *die Linie* HP, *welche das Verhältniss* NP : EH *gleich* p : n *abschneide: so ist klar, dass die Linie* HP *die Aufgabe löse.*

Cas. II. Fig. 67. *Analysis. Es werde nun die Linie* GK *gezogen nach der zweiten Art, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere* GF *nach* N *und durch den Punkt* N *ziehe der* MK *eine Linie parallel, welche die* GK *im Punkte* P *treffe. Weil nun die Verhältnisse* FK : EH *und* FK : NP *gegeben sind, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und desshalb die Linie* GP *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 6, II, *wo eine Determination statt findet.*

Determination. Nimm NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE; *verbinde* GH

und verlängere sie nach P. *Ich behaupte, dass die Linie* GP *ein kleineres Verhältniss* FK : EH *abschneide als jede andere aus* G *nach* EO *gezogene Linie. Denn ziehe eine andere Linie, wie* GS. *Weil* NH *die mittlere Proportionale ist zwischen* ON, NE, *) *so ist nach Fall* 6, II NP : EH *das kleinste Verhältniss. Daher ist* NP : EH < NS : EQ *und* perm. PN : NS < HE : EQ. *Es ist aber* PN : NS = KF : FR, *folglich ist* KF : FR < HE : EQ; perm. *also wird das Verhältniss* FK : EH *kleiner seyn als das Verhältniss* FR : EQ. *Die Linie* GP *schneidet daher ein kleineres Verhältniss* FK : EH *ab als jede beliebige aus* G *gezogene Linie.*

Synthesis. Es sey NH *die mittlere Proportionale zwischen* ON, NE; *verbinde* GH *und verlängere sie nach* P: *so wird die Linie* GKP *ein kleineres Verhältniss* FK : EH *abschneiden als jede andere Linie, welche aus* G *nach* EO *gezogen werden kann. Ist nun das zur Construction gegebene Verhältniss gleich* FK : EH, *so genügt* GKP *allein der Aufgabe. Ist es kleiner, so kann nicht construirt werden. Ist es aber grösser, so erhellet aus dem Vorigen, dass das Problem auf zweierlei Weise zu beiden Seiten der* GK *gelöst werden könne durch Linien nach* OH, HE. *Es sey also das gegebene Verhältniss* m : n *grösser als* FK : EH. *Nimm* m : p = FG : GN, *so ist auch*

$$m : p = FK : NP,$$

Es ist aber . . . . . $m : n > FK : EH,$

folglich ist aus dem Gleichen $p : n > NP : EH$. *Nun ist nach Fall* 6, II *das Verhältniss* NP : EH *das kleinste; mithin lassen sich zwei gerade Linien zu beiden Seiten der* GP *ziehen, wie die Linie* GS,

*) *Im Lat. folgt hier noch:* ac rectae duae *PN, ON* positione dantur; ac in recta *PN* sumitur punctum *N*, in ipsa vero *ON* punctum *E*; ac rectâ parallela ipsi *NP* cadit ultra punctum *E*, nempe recta *GO*: ratio igitur *NP* ad *EH* etc.

welche das Verhältniss NS : EQ = p : n *abschneide, und es ist offenbar, dass beide das Problem lösen.* *)

Cas. III. Fig. 68. *Analysis. Es werde nun nach der dritten Art die Linie* GKH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere sie nach* P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* GP *der Lage nach gegeben. Die Aufgabe wird nämlich durch Fall* 6, III *gelöst.*

Determination. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J: *so ist klar, dass das Verhältniss* FM : ME *kleiner sey als das zur Construction gegebene oder als das Verhältniss* FK : EH. *Ist also irgend ein Verhältniss gegeben, welches grösser ist als* FM : ME, *so wird auf folgende Weise construirt werden.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss oder das Verhältniss m : n *sey grösser als* FM : ME. *Mache* m : p = FM : NJ, *so wird aus dem Gleichen erhellen, dass* NJ : EM < p : n *sey. Wird also durch* G *eine Linie gezogen, welche von* JN, NE *Segmente in dem Verhältnisse* p : n *abschneidet: so wird diese Linie der* EM *begegnen, weil die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren. Schneidet also die Linie* GP *das Verhältniss* NP : EH = p : n *ab, so ist klar, dass diese Linie die Aufgabe löse.*

Cas. IV. Fig. 69. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* GP *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben wird, so ist*

*) *Die letzten Worte „und es ist offenbar u. s. w." lauten im Lat. so:* ac manifestum est rectam illam solvere problema. Eodemque modo demonstrabitur rectam alteram tantundem praestare. *Ein merkwürdiger Satz, weil gar nicht bewiesen wird, dass* GS *die Aufgabe löst.*

uch das Verhältniss NP : EH *gegeben, mithin* *e Linie* GP *der Lage nach. Die Aufgabe wird nämch auf dieselbe Weise wie die vorhergehende gelöst.*

Determination. Verbinde GM *und verlängere* *e nach* J: *so ist klar, dass die Construction mögch sey, wenn das gegebene Verhältniss kleiner ist* *s* FM : ME.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *einer als* FM : ME. *Mache wie* FG : GN *das ist* M : NJ *so* m : p, *so wird aus dem Gleichen bewiesen werden, dass* NJ : EM > p : n *sey. Wird also rlangt durch den Punkt* G *eine gerade Linie zu ehen, welche von* JN, NE *Segmente in dem Verältnisse* p : n *abschneide: so ist klar, dass jene Lie die* MN *treffen werde, weil, wie schon bewiesen orden ist, die dem Punkte* N *näheren geraden Lien kleinere Verhältnisse abschneiden als die von im entfernteren. Ist also die Linie* GP *so gezogen, ass sie das Verhältniss* NP : EH *gleich* p : n *abchneidet, so erhellet, dass sie die Aufgabe löse.*

Cas. V. Fig. 70. *Analysis. Es werde nunehr nach der fünften Art die Linie* KH *gezogen, elche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so wie as Verhältniss* NP : EH, *so ist auch die Linie* GH *er Lage nach gegeben. Die Construction reducirt ch nämlich auf Fall* 6, IV. *Hier findet aber eine ränze statt.*

Determination. Nimm die mittlere Proporonale zwischen ON *und* NE, *wie* NH, *und verbinde* H: *so wird diese Linie ein grösseres Verhältniss* P : EH *abschneiden als jede andere aus* G *nach* NB *ehende gerade Linie; woraus hervorgeht, dass auch as durch* GH *abgeschnittene Verhältniss* FK : EH *rösser sey als jedes andere durch irgend eine Linie us* G *nach* FL.

Synthesis. *Nimm* NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE *und verbinde* GH. *Diese Linie* GH *wird ein grösseres Verhältniss* FK : EH *als jede andere Linie abschneiden, die aus* G *nach* EL *gezogen werden kann. Aus den früheren Beweisen aber ist klar, dass das Problem (wenn das gegebene Verhältniss kleiner als* FK : EH *ist)* *) *auf zweierlei Weise gelöst werden könne, durch Linien nämlich, welche zu beiden Seiten der* GH *gezogen werden und* FK, KL *treffen.*

Fall II.

Es fallen nun die beiden geraden Linien, welche durch den Punkt *G* mit *FM*, *ME* parallel gezogen sind, diesseit der gegebenen Punkte *F*, *E*, wie die Linien *GO*, *GL*. Verbinde *FG* und verlängere sie: so wird diese Linie entweder durch den Punkt *E* gehen, oder jenseit oder diesseit desselben fallen. Sie gehe aber zuerst durch den Punkt *E*. Dann lassen sich durch den Punkt *G* Linien auf vier verschiedene Arten ziehen.

Cas. I. Fig. 71. *Analysis. Es werde nach der ersten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. (Durch* E *ziehe der* MF *die Linie* EU *parallel, welche* HK *in* P *treffe)* **). *Weil nun das Verhältniss* FK : EH *gegeben wird, so wie das Verhältniss* FK : EP, *welches nämlich gleich ist dem Verhältnisse* FG : GE; *so ist auch das Verhältniss* EP : EH *bekannt. Es werden also zwei gerade Linien der Lage nach gegeben, nämlich* HM, EU; *in beiden wird der gemeinschaftliche Punkt* E *genommen; und der gegebene Punkt* G *liegt im W.* MEU. *Es ist daher eine ge-*

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

**) *Statt dieses eingeklammerten Satzes steht im Lat.:* et agatur per *G* recta *GO* ipsi *MF* parallela.

ide Linie KGH *zu ziehen, welche das gegebene Ver-*
ältniss PE : EH *abschneide. Die Linie* HK *ist aber*
er Lage nach gegeben vermittelst Fall 3, I, *woselbst*
ne Determination statt findet.

Determination. Das zu construirende Ver-
ältniss muss nämlich kleiner seyn als FL : EO. *Ver-*
ingere LG *bis* N. *Weil* GO : OE > GO : OH *und*
O : OH = PE : EH, *so ist* GO : OE > PE : EH. *Es*
t aber GO = NE; *mithin ist* NE : OE > PE : EH
nd perm. NE : PE > OE : EH. *Nun ist* NE : PE =
F : FK, *folglich ist* LF : FK > OE : EH *und* perm.
L : EO > FK : EH. *Das Verhältniss* FK : EH, *das*
t das gegebene Verhältniss, muss also kleiner als
L : EO *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m : n
y kleiner als FL : EO. *Nimm* p : m *gleich*
G : GF. *Weil nun* EG : GF = EN : FL *und*
O = EN, *so ist*

p : m = GO : FL,

un ist . . . . . m : n < FL : OE,

lglich ist aus dem Gleichen p : n < GO : OE. *Nimmt*
an also GO : OH = p : n, *so wird* OH > OE *seyn.*
erbinde GH *und verlängere sie nach* K: *so ist klar,*
ss die Linie HGK *die Aufgabe löse.*

Cas. II. Fig. 72. *Analysis. Ziehe nun nach*
r zweiten Art die Linie HK, *welche das gegebene*
erhältniss FK : EH *abschneide, und verlängere sie*
ch P. *Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist,*
ist auch das Verhältniss PE : EH *und somit die*
nie PK *der Lage nach gegeben; indem das Pro-*
em auf Fall 3, II *zurückkommt. Hier findet aber*
ne Gränze statt.

Determination. Es muss nämlich das zu
nstruirende Verhältniss grösser seyn als FL : EO.
erlängere LG *nach* N. *Weil nun* GO : OH *oder*
E : EH *grösser ist als* GO : OE *das ist als* NE : EO,

so ist perm. PE:EN > EH:EO. *Es ist aber* PE:EN = KF:FL, *folglich ist* KF:FL *grösser als* EH:EO *und* perm. FK:EH *grösser als* FL:EO. *Nun ist* FK:EH *das gegebene Verhältniss; folglich muss dasselbe grösser als* FL:EO *seyn.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss m:n *sey grösser als* FL:EO. *Nimm* p:m = EG:GF *oder* EN:FL, *so wird, weil* m:n > FL:EO *ist, aus dem Gleichen seyn* p:n > EN:EO *das ist* GO:OE. *Es werden nun zwei gerade Linien, nämlich* OE, EP, *der Lage nach gegeben; in beiden wird der Durchschnittspunkt* E *genommen; und das gegebene Verhältniss ist grösser als* GO:OE. *Wird also eine Linie so gezogen, dass sie ein Verhältniss gleich* p:n *abschneidet, so wird sie* EO *treffen. Leistet dieses nun die durch* G *gezogene Linie* PK, *so ist klar, dass die Linie* PHK *der Aufgabe genügt.*

Cas. III. Fig. 73. *Analysis. Es werde nach der dritten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK:EH *abschneide. Verlängert sie bis zum Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK:EP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* EP:EH, *mithin die Linie* PK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 3, III. *Die*

Determination aber ist einleuchtend, denn das zu construirende Verhältniss muss grösser seyn als FM:ME, *weil das Verhältniss* FK:EH *offenbar grösser ist als* FM:ME.

Synthesis. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J; *und das gegebene Verhältniss sey* m:n, *grösser als* FM:ME. *Nimm* m:p = FG:GE. *Da nun* FG:GE = FM:EJ *und* m:n > FM:ME, *so erhellet aus dem Gleichen, dass* p:n > EJ:EM *ist. Ziehe also die Linie* KP, *welche das Verhältniss* EP:EH *gleich* p:n *abschneide: so wird diese Linie der* OM *begegnen, weil die dem Punkte* E *näheren geraden*

Linien kleinere *) *Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren. Und es leuchtet ein, dass die Linie* PGHK *die Aufgabe löse.*

Cas. IV. Fig. 74. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* HGP *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : EP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* EP : EH, *mithin die Linie* HP *der Lage nach gegeben.*

Determination. Das zur Construction gegebene Verhältniss muss aber kleiner als FM : ME *seyn, wie aus den frühern Beweisen hervorgeht.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *kleiner als* FM : ME. *Verbinde* GM, *verlängere sie nach* J *und nimm* m : p = FG : GE. *Da nun* FG : GE = FM : EJ *und* FM : ME > m : n, *so ist aus dem Gleichen* JE : EM > p : n. *Zieht man also die gerade Linie* HGP, *welche das Verhältniss* EP : EH = p : n *abschneidet, so wird diese Linie die* MH *treffen, weil die dem Punkte* E *näheren geraden Linien kleinere* *) *Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren; und es ist einleuchtend, dass die Linie* HKP *die Aufgabe löse.*

Fall 12.

Es treffe nun die durch die Punkte *F* und *G* gezogene Linie die *ME* jenseit des Punktes *E*, wie *FGN*: so ist klar, dass durch *G* Linien auf fünf Arten gezogen werden können.

Cas. I. Fig. 75. *Analysis. Es werde nach der ersten Art die Linie* GH *gezogen, welche das gege-*

*) *Im Texte steht unrichtig* majores, *indem in Fall* 3 *des ersten Buches die nähere oder entferntere Lage der Linien auf den Punkt* E *in* EP *bezogen wird.*

bene Verhältniss FK : EH *abschneide. Durch den Punkt* N *ziehe die Linie* NP *der* FM *parallel. Weil nun das Verhältniss* FK : NP *(welches nämlich dem Verhältnisse* FG : GN *gleich ist) gegeben ist: so ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* NH, NP *der Lage nach gegeben; in* NP *wird der Punkt* N, *in* NH *aber der Punkt* E *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* PNM; *und die durch* G *parallel gezogene Linie, nämlich* GO, *fällt jenseit* *) *des Punktes* E. *Es ist daher eine gerade Linie* PH *zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss* NP : EH *abschneide. Diese Linie* PH *ist also vermittelst Fall* 6, I *der Lage nach gegeben.*

Determination. Es muss aber das zur Construction gegebene Verhältniss offenbar kleiner seyn als FM : ME, *weil* KF < FM *und* EH > EM *ist.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n *kleiner als* FM : ME. *Verbinde* MG, *verlängere sie nach* J *und nimm* m : p = FG : GN *das ist* = FM : NJ; *so ist*

$$m : p = FM : NJ.$$

Es ist aber . . . . . $m : n < FM : ME$,

folglich ist aus dem Gleichen $p : n < NJ : EM$. **) *Wenn wir also aus dem Punkte* G *eine Linie ziehen wollen, welche (nach Fall* 6, I *des ersten Buches) von* NP, EH *Segmente in dem Verhältnisse* p : n *abschneide: so wird diese Linie offenbar die* MB *treffen, weil die dem Punkte* N *näheren geraden Linien kleinere* ***)

---

*) *Im Lat. steht unrichtig* citra, *denn* E *liegt zwischen* O *und* N.

**) *Im Lat. folgt hier noch:* Invertendo autem ratio *n* ad *p* major erit ratione *ME* ad *NJ.* Itaque si faciamus ut *n* ad *p* ita *ME* ad rectam aliam, minor erit illa quam *NJ.* Esto autem illa recta *NP*, ac juncta *GP* producatur ad *H.* Manifestum autem est quod, si velimus ducere etc.

***) *Im Lat. steht: weil die dem Punkte* E *näheren geraden Linien grössere.*

Verhältnisse abschneiden als die von ihm entfernteren. Es sey also die Linie PH *so gezogen, dass* NP : EH = p : n, *so ist klar, dass diese Linie die Aufgabe löst.*

Cas. II. Fig. 76. *Analysis. Es werde nun nach der zweiten Art die Linie* GK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH, *mithin die Linie* PK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 6, I.

Determination. Das zur Construction gegebene Verhältniss muss aber grösser seyn als FM : ME.

Synthesis. Verbinde GM, *verlängere sie nach* J *und verfahre völlig wie in der vorhergehenden Art.*

Cas. III. Fig. 77. *Analysis. Ziehe nach der dritten Art die Linie* GK, *welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide, und verlängere sie bis zum Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben wird, so wie das Verhältniss* FK : EH, *so ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben und somit die Linie* PK *der Lage nach vermittelst Fall* 6, II, *woselbst eine Determination statt findet.*

Determination. Nimm NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE; *verbinde* GH *und verlängere sie nach* P. *Diese Linie* GP *wird ein kleineres Verhältniss* NP : EH *abschneiden als jede andere Linie, welche aus* G *nach* EO *gezogen werden kann; woraus folgt, dass auch das Verhältniss* FK : EH *kleiner sey als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* EO.

Synthesis. Nach Anleitung dieser Begränzung nun ist die Aufgabe zu lösen; und zwar wird die Construction (wenn das gegebene Verhältniss grösser ist als FK : EH*) *) auf zweierlei Weise geschehen*

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

zu beiden Seiten der GK *durch Linien, welche nach* OH *und* HE *gezogen werden.*

Cas. IV. Fig. 78. *Analysis. Es werde nun nach der vierten Art die Linie* PK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Durch den Punkt* N *ziehe der* FM *eine Parallele, so wird das Verhältniss* FK : NP *gegeben seyn. Wegen des gegebenen Verhältnisses* FK : EH *aber ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben; folglich ist die Linie* PK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 6, III, *woselbst keine Determination statt findet. Die Construction aber ergiebt sich aus dem Vorigen.*

Cas. V. Fig. 79. *Analysis. Es werde nach der fünften Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH, *mithin die Linie* HK *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 6, IV, *woselbst eine Gränze statt findet.*

Determination. Nimm NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE *und verbinde* GH. *Diese Linie* GH *wird ein grösseres Verhältniss* NP : EH *abschneiden als jede andere aus* G *nach* NA *gezogene Linie; woraus folgt, dass auch das Verhältniss* FK : EH *grösser ist als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* NA.

Synthesis. Die Composition ist einleuchtend und zwar kann sie (wenn das gegebene Verhältniss kleiner ist als FK : EH*) *) auf zweierlei Weise geschehen zu beiden Seiten der* HK *durch Linien, welche nach* NH, HA *gezogen werden.*

Fall 13.

Es falle nun die Linie, welche durch die Punkte *G*, *F* gezogen und verlängert ist, diesseit des Punktes

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

, wie *NF*. Dann ist klar, dass durch den Punkt G nien auf fünf verschiedene Arten gezogen werden nnen.

Cas. I, II. III. Fig. 80. 81. 82. *Analysis. Es* rden *nach der ersten, zweiten und dritten Art die* nien HK *gezogen, welche die gegebenen Verhält*sse FK : EH *abschneiden. Durch den Punkt* N he *der* FM *die Linie* NP *parallel. Weil nun die* rhältnisse FK : EH *gegeben werden, so wie das Ver*ltniss FK : NP, *so sind auch die Verhältnisse* P : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Li*en NP, HM *der Lage nach gegeben; in* NP *wird* r *Punkt* N, *in* HM *aber der Punkt* E *genommen;* nd *der gegebene Punkt* G *liegt im W.* PNM. *Es* nd *daher gerade Linien zu ziehen, welche die gege*nen *Verhältnisse* NP : EH *abschneiden. Mithin sind* ese *Linien durch Fall* 4, I. II. III *der Lage nach* egeben. *Es findet aber daselbst keine Gränze statt* nd *die Construction ist aus dem Vorigen deutlich.*

Cas. IV. Fig. 83. *Analysis. Es werde nach* r *vierten Art die Linie* GK *gezogen, welche das* egebene *Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verlängere* K *nach* P. *Da nun das Verhältniss* FK : NP *ge*ben *ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH, *mit*in *die Linie* PK *der Lage nach gegeben vermittelst* 'all 4, IV.

*Determination. Das zu construirende Ver*ältniss *muss offenbar grösser als* FM : ME *seyn.*

Synthesis. Gegeben sey das Verhältniss m : n, rösser *als* FM : ME. *Verbinde* GM, *verlängere sie* ach J *und nimm* m : p = FG : GN; *so wird aus dem* leichen *folgen, dass* NJ : EM < p : n *ist. Wird also* urch *den Punkt* G *die Linie* PK *gezogen, welche* as *Verhältniss* NP : EH = p : n *abschneidet, so wird* ieselbe *nothwendig die* NM *treffen, weil die Linien,* elche *dem in der Linie* NM *genommenen Punkte*

N *näher sind, grössere* *) *Verhältnisse abschneiden als die von demselben entfernteren. Und aus dem Vorigen folgt, dass diese Linie* PK *die Aufgabe löst.*

Cas. V. Fig. 84. *Analysis. Es werde nun nach der fünften Art die Linie* PH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* PH *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 4, IV.

Determination. Es muss aber das zu construirende Verhältniss kleiner als FM : ME *seyn, wie aus dem vorhergehenden Beweise erhellet. Die Composition ergiebt sich aus dem Vorigen.*

Fall 14.

Es fallen nun die beiden mit *EM, MF* parallel gezogenen Linien so, dass die eine von ihnen *GO* diesseit des Punktes *E*, die andere *GL* aber jenseit des Punktes *F* sey. Dann ist klar, dass sich durch den Punkt *G* Linien auf fünf Arten ziehen lassen.

Cas. I. Fig. 85. *Analysis. Es werde nach der ersten Art die Linie* HK *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Verbinde* GF, *verlängere sie nach* N *und ziehe durch den Punkt* N *mit* MK *die Linie* NP *parallel, welche die Linie* HK *in* P *treffe. Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* HN, NP *der Lage nach gegeben; in der einen* NP *wird der Punkt* N, *in der andern* HN *aber der Punkt* E *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im W.* HNP; *und die Linie* GO, *welche durch* G *mit* NP *parallel gezogen ist, fällt diesseit des Punktes* E. *Es ist daher die ge-*

*) *lies: weil die dem Punkte* N *(in* NP*) näheren geraden Linien kleinere.*

rade Linie HP zu ziehen, welche das gegebene Verhältniss NP : EH abschneide. Diese Linie ist aber der Lage nach gegeben durch die erste Art des siebenten Falles im ersten Buche, woselbst keine Gränze statt findet.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. Nimm m : p = FG : GN und ziehe nach der ersten Art des siebenten Falles die Linie HGP, welche das Verhältniss NP : EH gleich p : n abschneide, so ist klar, dass die Linie HKP die Aufgabe löst.

Cas. II. Fig. 86. *Analysis.* Es werde nun nach der zweiten Art die Linie HK gezogen, welche das gegebene Verhältniss FK : EH abschneide. Verlängere HK nach P. Weil das Verhältniss FK : NP gegeben ist, so ist auch das Verhältniss NP : EH und somit die Linie HGP der Lage nach gegeben vermittelst der zweiten Art des siebenten Falles.

Determination. Nimm NH gleich der mittlern Proportionale zwischen ON, NE, verbinde GH und verlängere sie nach P. Ich behaupte, dass die Linie HP ein kleineres Verhältniss FK : EH abschneide als jede andere Linie, welche aus G nach EO gezogen werden kann.

Synthesis. Hieraus geht hervor, wie die Aufgabe gelöst werden könne und dass die Construction (wenn das gegebene Verhältniss grösser als FK : EH ist) *) auf zweierlei Weise möglich sey zu beiden Seiten der HP durch Linien, welche nach EH, HO gehen.

Cas. III. Fig. 87. *Analysis.* Ziehe nach der dritten Art die Linie GK, welche das gegebene Verhältniss FK : EH abschneide, und verlängere sie nach dem Punkte P. Weil das Verhältniss FK : NP gegeben ist, so ist auch das Verhältniss NP : EH und

*) Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.

somit die Linie GP *der Lage nach gegeben, vermittelst der dritten Art des siebenten Falles.*

Determination. Es ist aber klar, dass das zu construirende Verhältniss grösser seyn müsse als FM : ME.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *grösser als* FM : ME. *Verbinde* GM, *verlängere sie nach* J *und nimm* m : p = FG : GN, *so erhellet aus dem Gleichen, dass das Verhältniss* NJ : EM < p : n *ist. Wird also die Linie* GP *gezogen, welche das Verhältniss* NP : EH *gleich* p : n *abschneidet, so wird sie nothwendig die* OM *treffen; denn die dem Punkte* N *näheren geraden Linien schneiden kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren. Folglich löst die Linie* GP *das Problem.*

Cas. IV. Fig. 88. *Analysis. Ziehe nun nach der vierten Art die Linie* GH, *welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide, und verlängere sie bis zum Punkte* P. *Weil das Verhältniss* FK : NP *gegeben ist, so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* GP *der Lage nach gegeben vermittelst Fall* 7, III.

Determination. Es muss aber das zu construirende Verhältniss kleiner seyn als FM : ME.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *kleiner als* FM : ME. *Verbinde* GM, *verlängere sie nach* J *und construire völlig wie in der nächst vorhergehenden Art.*

Cas. V. Fig. 89. *Analysis. Es werde endlich nach der fünften Art die Linie* GH *gezogen, welche das gegebene Verhältniss* FK : EH *abschneide. Weil das Verhältniss* FK : EH *gegeben wird, so wie das Verhältniss* FK : NP, *so ist auch das Verhältniss* NP : EH *und somit die Linie* GH *der Lage nach gegeben vermittelst der vierten Art des siebenten Falles.*

Determination. Nimm NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE *und verbinde* GH. *Diese Linie* GH *wird ein grösseres Verhältniss* NP : EH *abschneiden als jede andere Linie, welche aus* G *nach* HN *gezogen werden kann; woraus nach dem Vorigen folgt, dass auch das Verhältniss* FK : EH *grösser sey als jedes andere durch irgend eine Linie aus* G *nach* FL.

Synthesis. Es ist klar, dass (wenn das gegebene Verhältniss kleiner ist als FK : EH*) *) die Construction auf zweierlei Weise geschehen könne zu beiden Seiten der* GH, *durch Linien nämlich, welche nach* FK, KL *gezogen werden. Dieses alles aber ergiebt sich leicht aus den früheren Beweisen.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ.

Den beiden der Lage nach gegebenen geraden Linien *AB, CD* begegnen die beiden Parallelen *GO, GL* ausserhalb **) der gegebenen Punkte *E, F*: so können offenbar auf fünf Arten Linien aus *G* gezogen werden.

I. II. Fig. 90. *Es schneiden also nach der ersten und zweiten Art die Linien* HK *die Verhältnisse* FK : EH *gleich den gegebenen ab. Verbinde die Punkte* G, F; *verlängere die Linie* GF *nach* N *und durch den Punkt* N *ziehe die Linie* NS *mit* CD *parallel; verlängere auch die Linie* HK *nach* P. *Weil nun die beiden Linien* NG, GF *der Grösse nach gegeben sind, so ist ihr Verhältniss gegeben. Es ist aber* NG : GF = NP : FK, *mithin wird das Verhältniss* NP : FK *ge-*

---

*) *Die eingeklammerten Worte fehlen im Lat.*

**) *d. h. die Parallelen gehen nicht durch die Punkte* E, F.

geben; und da das Verhältniss FK : EH *gegeben ist, so wird auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien* BN, NS *der Lage nach gegeben; in* BN *wird der Punkt* E, *in* NS *aber der Punkt* N *genommen; der gegebene Punkt* G *liegt im Winkel* BNS, *und die durch* G *mit* CD *parallel gezogene Linie geht nicht durch den Punkt* E; *es ist daher eine Linie* HGKP *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : EH *gleich einem gegebenen abschneide. Die Auflösung ergiebt sich hieraus: In der ersten Art findet keine Gränze statt; nicht so in der zweiten. Man wird hier aber die Gränze bestimmen, indem man* NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* NO *und* NE *nimmt,* GH *verbindet und diese Linie nach* P *verlängert. Dann ist nämlich das Verhältniss* NP : EH *in den Linien* NS, EO *ein kleinstes. Ich behaupte nun, dass auch das Verhältniss* FK : EH *in den Linien* MD, EO *ein kleinstes sey. Denn ziehe aus dem Punkte* G *eine andere gerade Linie* RGS. *Weil nun* NP : EH < NS : ER; *so ist* perm. NP : NS < EH : ER. *Es ist aber* NP : NS = FK : FQ, *folglich ist auch* FK : FQ < EH : ER *und* perm. FK : EH < FQ : ER. *Das Verhältniss* FK : EH *ist also das kleinste in den Linien* MD, EO.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Dieses Verhältniss wird entweder gleich seyn dem Verhältnisse* FK : EH *oder kleiner oder grösser. Ist nun das Verhältniss* m : n *gleich* FK : EH, *so wird die Linie* PG *allein das Problem lösen. Ist es kleiner, so ist die Aufgabe unmöglich. Ist es aber grösser, so kann auf zweierlei Weise construirt werden. Man setze also, das Verhältniss* m : n *sey grösser als* FK : EH. *Mache* m : p = FG : GN, *so wird das Verhältniss* p : n *grösser seyn als* NP : EH, *und es wird sich daher aus dem Punkte* G *eine Linie ziehen lassen, welche das Verhältniss* p : n *abschnei-*

det, und zwar auf zweierlei Weise, zu beiden Seiten der GP. *Ziehe also solche Linien* RGS, rGs: *ich behaupte, dass beide der Aufgabe genügen. Denn weil* FG : GN = Fq : Ns *und auch* = m : p, *so ist* Fq : Ns = m : p. *Es ist aber* Ns : Er = p : n, *folglich ist aus dem Gleichen* Fq : Er = m : n. *Die Linie* rGsq *genügt also der Aufgabe; und aus demselben Grunde leistet dasselbe die andere Linie* RGQS.

III. IV. Fig. 91. *Es schneiden nun nach der dritten und vierten Art die Linien* GHK *die Verhältnisse* FK : EH *gleich den gegebenen ab. Verbinde* GF, *verlängere sie nach* N *und durch den Punkt* N *ziehe eine Linie* NP *mit* CD *parallel; verlängere auch* GKH *nach* P. *Da die Linien* NG, GF *der Grösse nach gegeben sind, so ist ihr Verhältniss gegeben; und da* NG : GF = NP : FK, *so ist auch das Verhältniss* NP : FK *bekannt. Wegen des gegebenen Verhältnisses* FK : EH *ist also auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es werden also zwei gerade Linien in einer Ebene gegeben, nämlich* BN, UP; *in* BN *wird der Punkt* E, *in* UNP *aber der Punkt* N *genommen; der gegebene Punkt* G *ist innerhalb des W.* BNU *und die Linie, welche durch* G *mit* NP *parallel gezogen wird, fällt diesseit* *) *des Punktes* E. *Es ist also durch* G *eine Linie* GHP *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : EH *gleich einem gegebenen abschneide. Offenbar aber ist das Verhältniss* KF : FM *in der dritten Art grösser, in der vierten dagegen kleiner als* HE : EM, *also ist* perm. *das Verhältniss* FK : EH *in* III *grösser, in* IV *aber kleiner als* FM : ME. *Nun ist* FK : EH *gleich dem*

*) *d. h. zwischen* E *und* NP. *Oben war bloss angenommen, dass die Parallele nicht durch* E *gehe. Dieselbe Bemerkung ist in* Cas. V *zu machen.*

gegebenen Verhältnisse; folglich muss das gegebene Verhältniss in III *grösser, in* IV *aber kleiner als* FM : ME *seyn.*

Synthesis. Verbinde GM *und verlängere sie nach* J. *Das gegebene Verhältniss sey* m : n, *in* III *grösser, in* IV *aber kleiner als das Verhältniss* FM : ME. *Mache* m : p = FG : GN, *so wird das Verhältniss* p : n *in* III *grösser, in* IV *aber kleiner als* NJ : EM *seyn. Daher* *) *wird die Linie* GMJ *in* III *ein kleinstes, in* IV *aber ein grösstes Verhältniss abschneiden. Soll also aus* G *eine Linie gezogen werden, welche das Verhältniss* p : n *abschneidet, so wird dieselbe entweder nach der dritten Art die* EM *treffen, oder nach der vierten auf die andere Seite des Punktes* M *fallen. Ist nun die Linie* GP *so gezogen, dass* NP : EH = p : n, *so wird auch* FK : EH = m : n *seyn. Folglich genügt diese Linie* GP *der Aufgabe.*

V. Fig. 92. *Es schneide endlich nach der fünften Art die Linie* GKH *das Verhältniss* FK : EH *gleich dem gegebenen ab. Verbinde* GF, *verlängere sie nach* N *und ziehe durch* N *die Linie* US *der* CD *parallel. Weil nun die Linien* NG, GF *der Grösse nach gegeben sind, so ist das Verhältniss* NG : GF *gegeben. Es ist aber* NG : GF = NP : FK. *Wegen des gegebenen Verhältnisses* FK : EH *also ist auch das Verhältniss* NP : EH *gegeben. Es sind also in einer Ebene zwei gerade Linien der Lage nach gegeben, nämlich* EN, US; *in* EN *wird der Punkt* E *und in* US *der Punkt* N *genommen; der gegebene Punkt* G *aber ist innerhalb des W.* ENS *und die durch* G *mit*

---

*) *Dieses Daher* (Quocirca) *ist unverständlich. Entweder ist zu lesen: „Die Linie* GMJ *schneidet aber ..." oder es ist vorher der Satz zu ergänzen: „Die dem Punkte* N *näheren geraden Linien schneiden aber kleinere Verhältnisse ab als die von ihm entfernteren."*

CD *parallel gezogene Linie fällt diesseit des Punktes* E. *Es ist daher die gerade Linie* HGP *durch den Punkt* G *zu ziehen, welche das Verhältniss* NP : EH *gleich einem gegebenen abschneide, wie aus dem Obigen hervorgeht.*

Die Gränze aber wird bestimmt, indem man NH *gleich der mittlern Proportionale zwischen* ON, NE *nimmt und die Linie* GH *zieht, welche von* US, EN *die Segmente* NP, EH *abschneidet, deren Verhältniss ein grösstes ist. Ich behaupte, dass dieselbe Linie von* CD, EN *ein grösstes Verhältniss* FK : EH *abschneide. Denn ziehe eine andere Linie* GR, *so wird seyn* NP : EH > NS : ER *und* perm. NP : NS > EH : ER. *Es ist aber* NP : NS = KF : FQ, *also ist* KF : FQ > EH : ER *und* perm. FK : EH > FQ : ER. *Daher ist auch in den Linien* CD, EN *das Verhältniss* FK : EH *ein grösstes.*

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey m : n, *welches entweder gleich ist dem Verhältnisse* FK : EH, *oder grösser, oder kleiner. Ist es ihm gleich, so wird die Linie* GH *allein die Aufgabe lösen. Ist es grösser, so ist die Aufgabe unmöglich. Wenn es aber kleiner ist, so wird auf zweierlei Weise construirt werden. Es sey also das Verhältniss* m : n *kleiner als das Verhältniss* FK : EH; *mache* m : p *gleich* FG : GN, *so ist offenbar, dass das Verhältniss* p : n *kleiner ist als* NP : EH. *Nun ist aber das Verhältniss* NP : EH *das grösste, folglich ist es möglich aus* G *eine Linie zu ziehen, welche das Verhältniss* p : n *abschneidet, und zwar auf zweierlei Weise, zu beiden Seiten der* GH. *Sind also die Linien* GR, Gr *gezogen, welche Verhältnisse gleich* p : n *abschneiden, so behaupte ich, dass sie die Aufgabe lösen. Denn es ist* FG : GN *das ist*

FQ : NS *wie* m : p
und NS : ER *wie* p : n;
folglich ist aus dem Gleichen FQ : ER *wie* m : n. *Die Linie* GR *löst daher die Aufgabe; und auf gleiche Weise wird geteigt, dass die Linie* Gr *dasselbe leiste.*

Anhang.

Enthaltend einige allgemeine Anmerkungen und die Construction der Örter, welche die Aufgabe vom Verhältnisschnitt lösen.

Anmerkung 1.

Buch 1. Fall 1. 2.

Wenn die Punkte E, F, G *in einer geraden Linie liegen, so schneidet jede durch* G *gezogene Linie* HK *von den gegebenen* AB, CD *Segmente* EH, FK *in dem Verhältnisse* EG : GF *ab. Daher ist alsdann die Aufgabe nur in dem einzigen Falle möglich, wenn das gegebene Verhältniss gleich* EG : GF *ist, und wird dann zugleich unbestimmt.*

Anmerkung 2 (*Halley*).

Buch 1. Fall 4 bis 7.

Zur Auflösung der vier letzten Fälle des ersten Buches ist erforderlich, dass GL : FO *gleich dem gegebenen Verhältnisse gemacht werde. Es fragt sich also, nach welcher Richtung hin* FO *zu nehmen sey. Da in allen Fällen* MK : KL = KF : FO *und aus dieser Proportion* componendo *oder* dividendo *u. s. w. eine andere hergeleitet wird, so müssen die Punkte* K, F, O *in derselben Ordnung auf einander folgen, in welcher die Punkte* M, K, L *genommen sind. Liegen also* MK, KL *vom Punkte* K *aus nach derselben Richtung oder nach entgegengesetzter: so müssen auch* KF, FO *vom Punkte* F *aus gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Auch verdient bemerkt*

zu werden, dass an LO *ein dem* □ ML . FO *gleiches Rechteck entworfen werden müsse, so dass der Überschuss ein Quadrat ist, wenn* FO *von* F *aus nach derselben Richtung hin liegt, nach welcher* G *von* AB *aus genommen ist; so aber, dass die Ergänzung ein Quadrat ist, wenn* FO *nach der entgegengesetzten Richtung liegt. — In Fall* 5 *ist überall* F *statt* L *zu lesen.*

Anmerkung 3.

Buch 2. Fall 2.

Der zweite Fall des zweiten Buches lässt sich wie Fall 8, 9 *behandeln, wodurch, wie* Halley *behauptet, die Analysis und Determination einfacher werde. Dem ist aber nicht so. Ziehe in* Fig. 34, 35 *nach* AB *die Linie* GO *parallel zu* CD, *so ist*

EH : FK = □ EHO : FK . HO
= □ EHO : OM . MF,

Daher ist □ EHO *gegeben. Wegen* Pappi Lemma 13 *und weil der Punkt* M *zwischen* E, O *liegt, wird also in beiden Figuren eine doppelte Determination statt finden, ähnlich der Apollonischen Darstellung. Es ist nämlich* EM *in* Fig. 34 *entweder grösser oder nicht grösser als* MO; *in* Fig. 35 *aber entweder kleiner oder nicht kleiner als* MO.

Anmerkung 4 (*Halley*).

Buch 2.

Die Fälle 7, 8, 9 *des zweiten Buches löst Apollonius ohne Hilfe des ersten Buches auf. Auch die übrigen Fälle des zweiten Buches können unabhängig vom ersten gelöst werden.*

Es sey (Fig. 93) *die Linie* HK *so gezogen, dass* H : FK *gleich dem gegebenen Verhältnisse ist. Verbinde* EG, *welche* CD *in* N *schneide, ziehe* GL, GO *parallel den Linien* AB, CD *und mache* EO : FT *gleich* EH : FK; *so ist* FT *und der Punkt* T *bekannt. Weil nun* EO : FT = EH : FK, *so ist* perm. OE : EH = TF : FK *und* convert.

EO : OH = FT : TK,

es ist aber . . . . EO : OH = KL : LN,

weil □ EO . LN = □ OH . KL, *indem jedes derselben gleich* □ OGL *ist. Folglich ist* FT : TK = KL : LN *und* □ FT . LN = □ TKL. *Nun ist* □ FT . LN *wegen einer bekannten Seiten gegeben, mithin auch* □ TKL, *so der Punkt* K *und die Linie* GK.

Sinnreich lehrt Halley die Aufgabe des zweiten Buches in die Aufgabe des ersten zu verwandeln. Es sey (Fig. 94) *die Linie* GHK *so gezogen, dass* H : FK *gleich dem gegebenen Verhältnisse* m : n *ist, macht man nun* EM : Fa = m : n, *so ist auch* MH : aK = m : n. *Man betrachte also als gegeben in* AB *den Punkt* M *und in* CD *den Punkt* a (*oder* a' *für die Linie* H'K') *und ziehe, wie im ersten Buche gelehrt worden ist, aus* G *die Linie* HK *so, dass* MH : aK (*oder* MH' : a'K') = m : n *ist; so wird auch* EH : FK (*oder* EH' : FK') = m : n *seyn.*

Ferner bemerkt Halley, dass sich die meisten Fälle des zweiten Buches auf eine doppelte Art construiren lassen, indem durch den gegebenen Punkt G *eine Parallele nach der einen oder der andern von den gegebenen Linien* AB, CD *gezogen werden könne. Durch diese verschiedenen Constructionen wird jedoch nicht, wie Halley behauptet, die Aufgabe auf andere Fälle des ersten Buches zurückgeführt, sondern stets auf dieselben. Dass sich aber wirklich im zweiten Buche beide Constructionen vorfinden, hat Halley übersehen* (*vergl. die Vorrede*).

Anmerkung 5 (*Halley*).

Alle geraden Linien, welche von zwei der Lage nach gegebenen geraden Linien Segmente abschneiden, die gegebenen Punkten anliegen und deren Verhältniss einem gegebenen gleich ist, gehen entweder durch einen gegebenen Punkt, oder sind einer der Lage nach gegebenen Linie parallel, oder berühren einen Kegelschnitt.

I. Buch 1. Fall 1. 2.

Die der Lage nach gegebenen Linien *AB*, *CD* sind einander parallel. Fig. 95.

In AB *wird der Punkt* E, *in* CD *der Punkt* F *genommen und das gegebene Verhältniss sey* m : n. *Verbinde* EF, *mache* EL = m, MF = FP = n *und verbinde* LP, LM, *welche die Linie* EF *in den Punkten* Q, R *schneiden: ich behaupte, dass jede durch* Q *oder durch* R *gezogene Linie von den gegebenen* AB, CD *Segmente, die den Punkten* E, F *anliegen, in dem gegebenen Verhältnisse* m : n *abschneide. Denn ziehe durch* R *eine beliebige Linie* KH, *so ist*

EH : FK = ER : RF = EL : FM = m : n.

Eben so, wenn durch Q *eine beliebige Linie* H′ K′ *gezogen wird, ist*

EH′ : FK′ = EQ : QF = EL : FP = m : n.

Wird nun irgend ein Punkt G *innerhalb oder ausserhalb der Parallelen gegeben, so verbinde* GR, GQ: *so werden beide Linien von* AB, CD *Segmente in dem Verhältnisse* m : n *abschneiden. Ist eine von den Linien* GQ, GR *parallel mit* AB, *welche also die gegebenen nicht trifft: so wird nur die andere die Aufgabe lösen. In diesem Falle ist nämlich, wenn z. B.* GR ∦ AB *ist,* H′G : GK′ *(das ist* EG : GN *in* Fig. 1*) gleich dem gegebenen Verhältnisse* m : n *oder gleich* ER : RF. *Hieraus ergiebt sich zugleich Alles, was*

Apollonius über die Gränzen der Verhältnisse gesagt hat. — Auch ist zu bemerken, dass die Linie EF *in den Punkten* Q, R *harmonisch getheilt wird, weil* EQ : QF = ER : RF *ist.*

II. Buch 1. Fall 3.

Die gegebenen Linien *AB*, *CD* schneiden einander; in beiden wird der Durchschnittspunkt *M* genommen. Fig. 96.

Das gegebene Verhältniss sey m : n. *In* AB *nimm* MN = m *und in* CD *mache* PM = MQ = n *und verbinde* NP, NQ: *so wird jede mit* NP *oder* NQ *parallel gezogene Linie von* AB, CD *Segmente in dem Verhältnisse* m : n *abschneiden. Ist also irgend ein Punkt* G *gegeben, so ziehe durch ihn die Linien* HK *und* H'K' *parallel mit* NP *und* NQ: *so leisten beide das Verlangte. Geht eine der beiden durch* G *gezogenen Linien durch* M, *so löst nur die andere die Aufgabe.*

III. Buch 1. Fall 4 bis 7.

Die gegebenen Linien *AB*, *CD* schneiden einander; in *AB* wird der Durchschnittspunkt *M*, in *CD* der Punkt *F* genommen. Fig. 97.

Das gegebene Verhältniss sey m : n. *Nimm in* AB *die Abschnitte* MP = MQ *so, dass* PM : MF = m : n, *und beschreibe die Parabeln* RPFS, TFQU, *welche die Linien* AB, CD *in* P, F; Q, F *berühren: so behaupte ich, dass jede Tangente derselben von den Linien* AB, CD *Segmente, die den Punkten* M, F *anliegen, abschneiden, deren Verhältniss gleich* m : n *ist.*

Denn ziehe an eine von beiden Parabeln, z. B. an RPS, *eine beliebige Tangente, welche* AB, CD *in* H, K *treffe: so ist* (Apollon. Sect. Conic. lib. 3 prop. 41. Rob. Simson Sect. Conic. lib. 5 prop. 14) MP : PH

$= FM : MK$ *und* perm. $PM : MF = PH : MK$; *und da die Summen oder Differenzen der homologen Glie. der dasselbe Verhältniss haben, so ist* $MH : FK = PM : MF = m : n$.

Zusatz. Wenn der gegebene Punkt G *ausserhalb beider Parabeln liegt, so giebt es immer vier Tangenten; liegt er zwischen den Schenkeln einer Curve, so lassen sich nur zwei Tangenten ziehen; und liegt er in einer Curve selbst, so giebt es drei Tangenten, welche das Verlangte leisten. Es wird also nachgewiesen werden müssen, in wiefern diese Lagen mit den Determinationen des* 5. 6. 7. *Falles übereinstimmen.*

Durch F *ziehe mit* AB *eine Linie parallel, welche die Parabeln in* R, U *schneide, mache* $bM = MF$ *und verbinde* bP, *welche* FR *in* a *treffe. Wegen der Parallelen ist*

$$bP : Pa = bM : MF,$$

also $bP = Pa$ *und desshalb* ab *ein Durchmesser der Parabel* RS (Sims. I, 14. Conv.). *Weil nun* FR *der durch den Scheitel* P *des Durchmessers* ab *gehenden Tangente* MB *parallel ist, so ist* FR *eine Ordinate dieses Durchmessers* (Sims. I, 11) *und wird also von ihm in* a *halbirt. Verbinde* bR, *welche* AB *in* c *treffe, so berührt sie die Parabel* (Sims. I, 14. Cor. 1), *mithin ist nach dem Obigen*

$$Mc : Fb = PM : MF = m : n.$$

Es ist aber Mc *die Hälfte von* FR, *und* Fb *die Hälfte von* 4 FM, *folglich ist auch*

$$RF : 4\,FM = m : n,$$

Liegt also der gegebene Punkt G *in der Linie* RF (*Fall* 5) *und ist* $PM : MF$ *oder* $m : n = GF : 4\,FM$, *so werden die Punkte* G, R *in einander fallen und es lassen sich nur* 3 *Tangenten ziehen. Ist* $PM : MF$ *oder* $m : n > GF : 4\,FM$, *so liegt der Punkt* G *zwischen* F, R *und es giebt nur* 2 *Tangenten an die*

Parabel TU. *Ist endlich* $m : n < GF : 4FM$, *so liegt* G *in der Verlängerung der* FR *und es giebt* 4 *Tangenten. Alles dieses stimmt überein mit der Determination des fünften Falles.*

Ferner ziehe durch irgend einen Punkt L *in* MD *eine Linie mit* AB *parallel, welche die Parabel* RS *in* E, N *treffe, und durch* N *ziehe eine Tangente, welche* AB, CD *in* H, K *schneide: so ist wegen der Tangenten* (Sims. V, 14)

$$FM : MK = KH : HN.$$

Wegen der Parallelen MH, LN *aber ist*

$$KM : ML = KH : HN,$$

folglich ist $FM : MK = KM : ML$, *also* MK *die mittlere Proportionale zwischen* FM, ML. *Wird nun* $OK = KL$ *gemacht, so ist (wie im* 6. *und* 7. *Falle des ersten Buches erwiesen worden ist)*

$$MH : FK = NL : FO.$$

Wegen der Parabel aber ist (Sims. V, 14)

$$MH : FK = PM : MF;$$

folglich ist $NL : FO = PM : MF$ *das ist* $= m : n$.

Eben so, wenn durch E *die Tangente* hk *gezogen und* $ok = kL$ *gemacht wird, lässt sich zeigen, dass* $EL : Fo = Mh : Fk = PM : MF = m : n$ *ist.*

Wird nun in der Linie LN *irgend ein Punkt* G *genommen und ist* $m : n = GL : FO$, *so fällt* G *in* N *und es giebt* 3 *Tangenten. Dasselbe findet statt, wenn* $m : n = GL : Fo$ *ist, in welchem Falle* G *in* E *liegt. Ist* $m : n > GL : FO$ *und* $< GL : Fo$, *so liegt* G *zwischen* E, N *und dann lassen sich nur* 2 *Tangenten an die Parabel* TU *ziehen. Endlich wenn* $m : n < GL : FO$ *oder* $> GL : Fo$ *ist, so liegt* G *in einer von den Verlängerungen der* EN *und dann lassen sich stets* 4 *Tangenten ziehen. — Diese Bestimmungen kommen sämmtlich überein mit den Determinationen des* 6. *und* 7. *Falles im ersten Buche.*

IV. Buch 2.

Die gegebenen Linien *AB*, *CD* schneiden einander in *M*; in *AB* wird der Punkt *E*, in *CD* der Punkt *F* genommen. Fig. 98.

Das gegebene Verhältniss sey m : n. *In* AB, CD *nimm die Abschnitte* Ep, Fq *so dass die Verhältnisse*

EM : Fq *und* Ep : FM

gleich m : n *sind; mache* PE = Ep, QF = Fq *und beschreibe zwei Parabeln, deren eine die Linien* AB, CD *in* P, Q; *die andere über dieselben Linien in* p, q *berührt: so wird jede Tangente dieser Parabeln von* AB, CD *Segmente, die den Punkten* E, F *anliegen, in dem gegebenen Verhältnisse* m : n *abschneiden. Denn weil die Verhältnisse*

EM : Fq *oder* EM : FQ

und Ep : FM *oder* EP : FM

gleich m : n *sind und die Summen oder Differenzen der homologen Glieder dasselbe Verhältniss haben, so ist*

pM : Mq = m : n

und PM : MQ = m : n.

Ziehe nun eine beliebige Tangente an eine Parabel, welche AB, CD *in* H, K *schneide, so ist* (Sims. V, 14) pH : HM = MK : Kq *und* comp. pM : MH = Mq : qK, *also* perm.

pM : Mq = MH : qK.

Nun ist . . . . . pM : Mq = EM : Fq,

denn jedes dieser Verhältnisse ist gleich m : n. *Daher ist* MH : qK = EM : Fq. *Nimmt man also die Differenzen der homologen Glieder, so erhält man* EH : FK = EM : Fq = m : n.

Zusatz 1. *Nach der Construction ist*

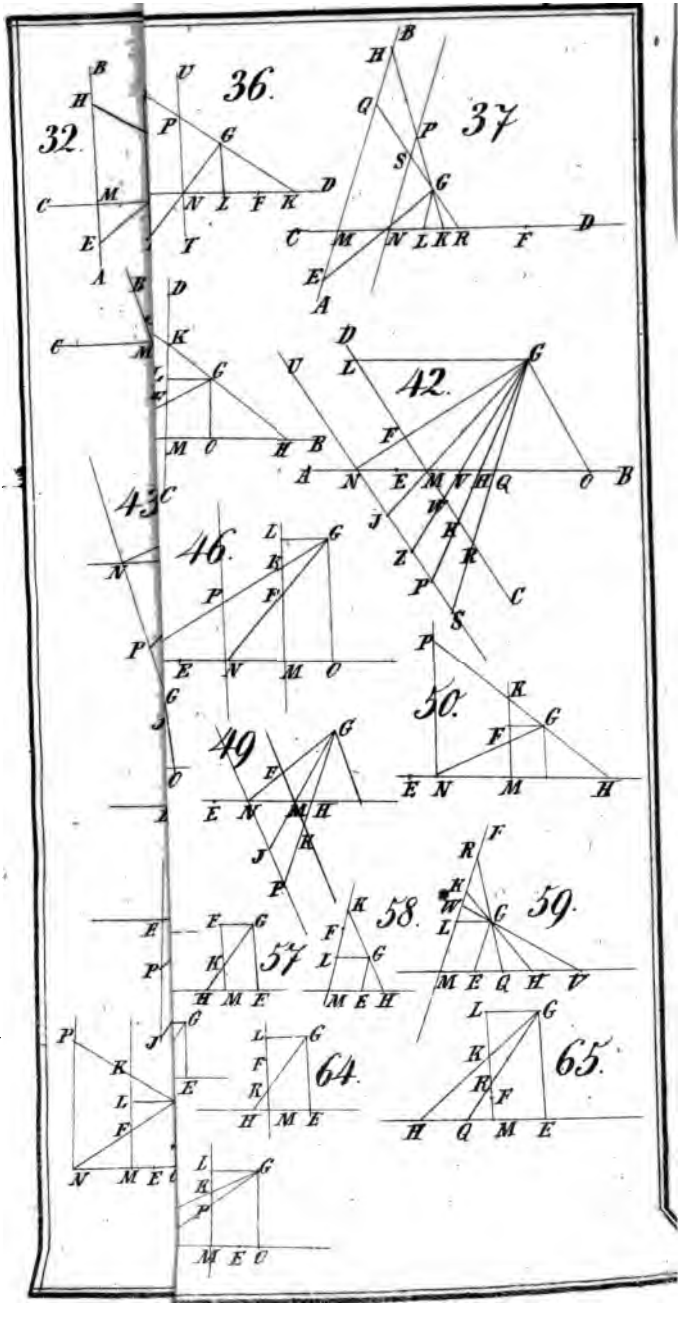
EM : FQ = EP : FM = m : n.

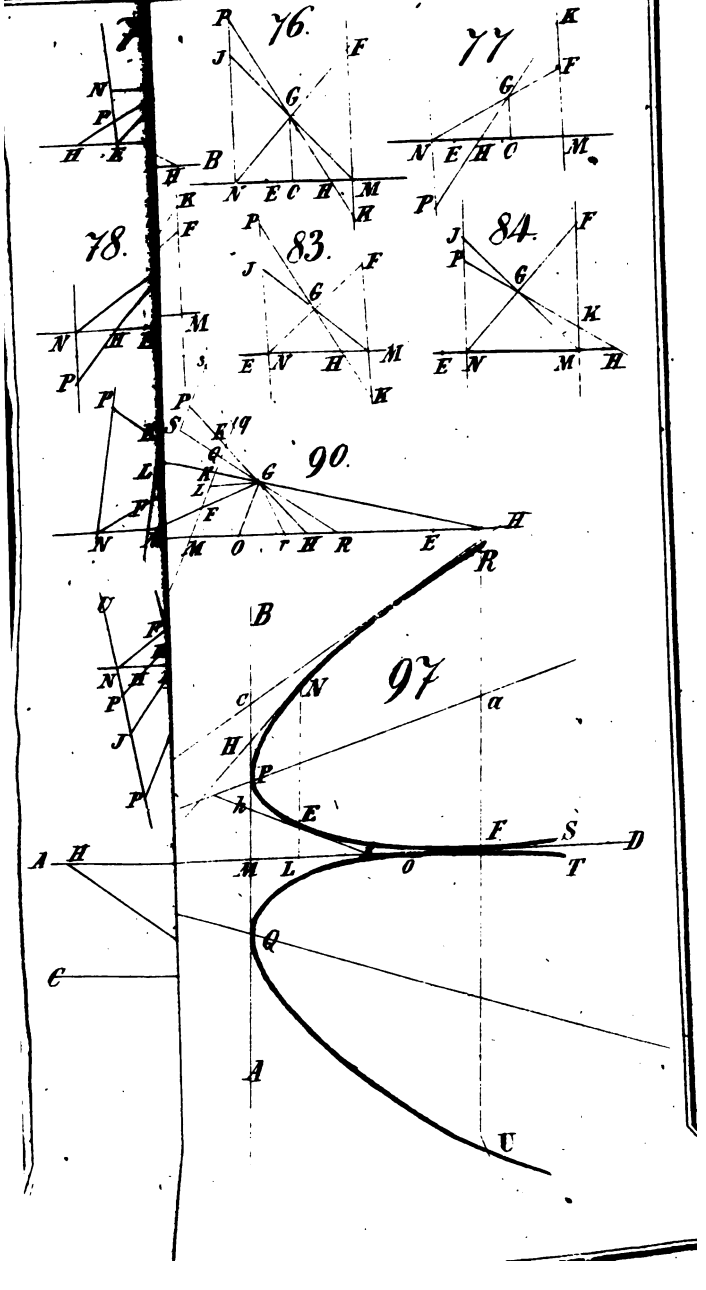
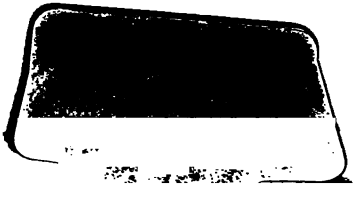
Ist nun PE = EM, *also* EM : MF = m : n, *so ist auch* MF = FQ *und die Punkte* P, Q *fallen beide in* M *zusammen. In diesem Falle lässt sich nur die Para-*

bel pq *construiren; ausser den Tangenten derselben löst dann aber auch jede durch* M *gehende, so wie jede der* EF *parallele Linie die Aufgabe.*

Ist aber PE $\gtrless$ EM, *so ist auch* MF $\gtrless$ FQ. *Daher kann die Parabel* PQ *nie im W.* AMD *liegen, sondern nur in einem seiner Nebenwinkel.*

Zusatz 2. *Weil die Tangenten* pM, Mq *der einen Parabel, so wie die Tangenten* PM, MQ *der andern von derselben dritten Linie* EF *proportionirt geschnitten werden: so berührt diese Linie* EF *beide Parabeln* (Sims. V, 14. Conv.). *Wenn daher einer von den Berührungspunkten dieser Linie der gegebene Punkt* G *ist, so kann die Aufgabe nur auf eine Weise gelöst werden, nämlich durch eine Tangente an die andere Parabel, in welcher* G *nicht liegt. Ist aber ein anderer Punkt in* EF *gegeben oder liegt der Punkt* G *zwischen den Schenkeln einer Curve, so lassen sich zwei Tangenten ziehen. Findet sich der Punkt* G *in einer Curve selbst, so giebt es drei Tangenten. In allen übrigen Fällen lassen sich stets vier Tangenten ziehen.*


32.
36.
37
42.
43
46.
49
50.
57
58.
59
64.
65.


76.
77
78.
83.
84.
90.
97